

Formulaire : Trigonométrie

Toutes le formules de trigo se retrouvent à partir de l'exponentielle complexe et des règles de calcul sur les puissances. Il faut impérativement savoir que **ces formules existent** et **savoir les retrouver rapidement**.

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

On est sur le cercle de rayon 1, d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b) \\ \tan(a+b) &= \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} \end{aligned}$$

En développant $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$, puis en identifiant partie réelle et partie imaginaires.

En combinant les deux formules précédentes.

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) &= \frac{1 - \tan^2(a)}{1 + \tan^2(a)} \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) &= \frac{2\tan(a)}{1 + \tan^2(a)} \\ \tan(2a) &= \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\cos(a)\cos(b) &= \cos(a+b) + \cos(a-b) \\ 2\sin(a)\sin(b) &= -\cos(a+b) + \cos(a-b) \\ 2\sin(a)\cos(b) &= \sin(a+b) + \sin(a-b) \end{aligned}$$

$\cos(a)\cos(b) = \Re(e^{ia}\cos(b)) = \Re\left(e^{ia}\frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2}\right)$ puis la linéarité de la partie réelle. Etc...

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ -\cos(p) + \cos(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

Les mêmes que les précédentes, mais dans l'autre sens. Avec $p = a + b$ et $q = a - b$.

En trigonométrie hyperbolique, on suit la même démarche, souvent seuls quelques signes changent devant les sh.

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}^2(a) - \operatorname{sh}^2(a) = 1$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(a+b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) \\ \operatorname{sh}(a+b) &= \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) \\ \operatorname{th}(a+b) &= \frac{\operatorname{th}(a) + \operatorname{th}(b)}{1 + \operatorname{th}(a)\operatorname{th}(b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(2a) &= \operatorname{ch}^2(a) + \operatorname{sh}^2(a) = 2\operatorname{ch}^2(a) - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2(a) = \frac{1 + \operatorname{th}^2(a)}{1 - \operatorname{th}^2(a)} \\ \operatorname{sh}(2a) &= 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(a) = \frac{2\operatorname{th}(a)}{1 - \operatorname{th}^2(a)} \\ \operatorname{th}(2a) &= \frac{2\operatorname{th}(a)}{1 + \operatorname{th}^2(a)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) &= \operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b) \\ 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b) &= \operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b) \\ 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) &= \operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b) \end{aligned}$$

Se retrouve à partir des formules de $\operatorname{ch}(a+b)$, $\operatorname{ch}(a-b)$, etc. Ou en prenant les parties paires et impaire, sur le modèle de $\Re$ et $\Im$.

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(p) + \operatorname{ch}(q) &= 2\operatorname{ch}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \operatorname{ch}(p) - \operatorname{ch}(q) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \operatorname{sh}(p) + \operatorname{sh}(q) &= 2\operatorname{sh}\left(\frac{p+q}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

Les mêmes que les précédentes, mais dans l'autre sens. Avec $p = a + b$ et $q = a - b$.