

I) Développements limités usuels

Tous les DL usuels suivants sont au voisinage de $\boxed{x = 0}$

Les développements limités se regroupent presque tous en deux familles.

A) Famille exponentielle

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (\text{Taylor})$$

$$\text{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{ch}(x) = \text{partie paire de } e^x)$$

$$\text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{sh}(x) = \text{partie impaire de } e^x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \quad (\cos(x) = \Re(e^{ix}))$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\sin(x) = \Im(e^{ix}))$$

B) Famille géométrique

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \quad (\text{série géométrique})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad (\text{en remplaçant } x \text{ par } -x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \quad (\text{en intégrant la série géométrique})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}) \quad (\text{au choix})$$

$$\text{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Le dernier s'obtient en remplaçant x par x^2 dans la série géométrique alternée puis en intégrant, car $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

C) Autres

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)}$$

S'obtient directement avec la formule de Taylor : $\frac{d^k}{dx^k} (1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$

Moyen mnémotechnique : ressemble à une formule du binôme (et coïncide avec le binôme lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$).

Cas important : $\alpha = \pm \frac{1}{2}$. On en déduit le DL de $\text{Arcsin}(x)$.

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}$$

S'obtient soit à partir de $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, soit $\tan(x) \sim x$ puis $\tan' = 1 + \tan^2$. Pas de formule générale.

II) Rappels des propriétés générales

Propriété 1 (Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $a \in I$.

Alors $\forall x \in I$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + o((x-a)^n)$$

Preuve : cf cours PCSI.

Remarque 1

Fréquemment, $a = 0$:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

Propriété 2

Un développement limité s'intègre terme à terme sans problème.

Propriété 3

Le DL d'une fonction f paire ne contient que des puissances paires.

Le DL d'une fonction f impaire ne contient que des puissances impaires.