

Épreuve de Mathématiques 2

Correction

4

Exercice 1 (CCINP MP 2022)

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

- 1) *Du x dans une borne d'intégrale ? « primitive ». Et une primitive F de f , c'est $F' = f$. Ni plus, ni moins. Pas de formule folklorique.*

H est une primitive de $h : x \mapsto e^{ix^2}$.

Comme h est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,

La fonction H est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

De plus, par définition d'une primitive, $H' = h$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H'(x) = e^{ix^2}$$

- 2) *Pour étudier la parité, vous remplacez x par $-x$. C'est tout. Rien d'autre. Ensuite, on s'attaque à la formule écrite (pas à un autre qui vous arrange) avec les outils habituels : intégration par parties ou changement de variable ?*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On effectue le changement de variable $u = -t$, donc $dt = -du$, et sans oublier de changer les bornes,

$$\begin{aligned} H(-x) &= \int_0^{-x} e^{it^2} dt \\ &= \int_0^x e^{i(-u)^2} (-1) du \\ &= -H(x) \end{aligned}$$

Donc

La fonction H est impaire

- 3) Soit $x > 0$. Effectuons le changement de variable $u = \varphi(t) = t^2$. La fonction φ est $\mathcal{C}^1$, strictement croissante donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{cases} du = \varphi'(t) dt = 2t dt \\ dt = \frac{du}{2\sqrt{u}} \end{cases} \quad \text{et} \quad t = x \longleftrightarrow u = t^2 = x^2$$

Donc le théorème¹ de changement de variable nous dit que les deux intégrales $\int_0^x e^{it^2} dt$ et $\int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{2\sqrt{u}} du$ sont de même nature, et égales si elles convergent. Comme la première est une intégrale sur un segment, elle converge, et

$$H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du.$$

1. Il faut utiliser le théorème dès que les intégrales sont généralisées. Or, ici, $1/\sqrt{u}$ n'est pas définie en 0 : l'intégrale donnée par l'énoncé est généralisée en 0.

4) Soit $x > \sqrt{2\pi}$. D'après ci-dessus,

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$$

Effectuons une intégration par parties sur le segment $^2 [\sqrt{2\pi}, x]$: Avec

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\sqrt{t}} = t^{-\frac{1}{2}} & v &= \frac{1}{i} e^{it} = -ie^{it} \\ u' &= -\frac{1}{2} t^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2t^{\frac{3}{2}}} & v' &= e^{it} \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} H(x) - H(\sqrt{2\pi}) &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{-ie^{it}}{\sqrt{t}} \right]_{2\pi}^{x^2} - \int_{2\pi}^{x^2} \frac{ie^{it}}{2t^{\frac{3}{2}}} dt \right) \\ &= -i \frac{e^{ix^2}}{2x} + i \frac{e^{2i\pi}}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{it}}{t^{\frac{3}{2}}} dt \end{aligned}$$

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i \frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du.$$

5) Étudions chacun des termes de l'expression précédente :

- Comme $\left| -i \frac{e^{ix^2}}{2x} \right| = \frac{1}{2x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -i \frac{e^{ix^2}}{2x} \text{ existe et vaut } 0$$

- Étude de l'intégrale $\int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du$

La fonction $g : u \mapsto \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}}$ est continue donc continue par morceaux sur $[2\pi, +\infty[$.

Étude en $+\infty$: $|g(u)| = \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}} du$ converge (Riemann, $\alpha = 3/2 > 1$).

Donc $\int_{2\pi}^{+\infty} g(u) du$ converge absolument donc converge.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du$ existe.

Donc, comme combinaison linéaire de limites convergentes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$ existe³

$$\text{L'intégrale généralisée } \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt \text{ converge}$$

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Après passage du module $|\cdot|$, les « i » ne repoussent plus : avec $a, b \in \mathbb{R}^2$,

$$|a + ib| = \underbrace{\sqrt{a^2 + b^2}}_{\text{Il n'y a plus de } i}$$

2. L'intégration par parties ne peut pas se faire sur $]0, x^2]$, le crochet n'a pas de limite en 0.

3. et vaut $H(\sqrt{2\pi}) + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du$, mais peu importe.

6) Soit $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Comme $e^{-x^2(t^2-i)} = e^{-x^2t^2} e^{ix^2}$ et $e^{-x^2t^2} \geq 0$, il vient

$$\left| e^{-x^2(t^2-i)} \right| = \left| e^{-x^2t^2} \right| \left| e^{ix^2} \right| = e^{-x^2t^2}$$

Et

$$\left| t^2 - i \right| = \sqrt{t^4 + 1}$$

7) a) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$ est paire sur $\mathbb{R}$, donc

$$g(x) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} dt$$

b) Méthodes de majoration : $a \leq b \implies e^a \leq e^b$.

Rien d'autre, rien de magique. Ne sautez pas d'étapes.

On a le cas particulier, avec souvent $a = -x$, $a = -x^2t$, etc..., $a \leq 0 \implies e^a \leq e^0 = 1$

Si vous vous êtes trompés une fois, repartez toujours de $a \leq b \implies \dots$

Étude de l'intégrabilité de φ : Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$.

La fonction φ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$.

Étude en $+\infty$: $\varphi(t) \sim \frac{1}{t^2}$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$ converge.

Ainsi, la fonction φ , positive, est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Majoration :

$$\begin{aligned} \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad |f(x, t)| &= \left| \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} \right| \\ &= \frac{\left| e^{-x^2(t^2-i)} \right|}{\left| t^2 - i \right|} \\ &= \frac{e^{-x^2t^2}}{\sqrt{t^4+1}} \\ &\leq \varphi(t) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\text{La fonction } \varphi : \begin{cases} [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \end{cases} \text{ convient}$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Par théorème de majoration :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t) \\ \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t) dt \text{ converge} \end{cases} \implies \int_{\mathbb{R}_+} |f(x, t)| dt \text{ converge}$$

Donc l'intégrale $g(x) = 2 \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ converge absolument donc converge :

$$\text{La fonction } g \text{ est définie sur } \mathbb{R}$$

On admet qu'un théorème du cours nous montrera qu'elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Et qu'on peut déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$: on trouve que g a une limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$.

8) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(t^2-i)}$$

Posons $\varphi_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi_{a,b}(t) = 2be^{-a^2t^2}$$

Majoration

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| &= 2|x| \left| e^{-x^2(t^2-i)} \right| \\ &= 2xe^{-x^2t^2} && \text{Car } 0 < a < b \text{ et } 6) \\ &\leq 2be^{-a^2t^2} && \text{Car } x < b \text{ et } x^2 > a^2 \\ &= \varphi_{a,b}(t) \end{aligned}$$

Montrons que $\int_0^{+\infty} |\varphi_{a,b}(t)| dt$ converge : La fonction $\varphi_{a,b}$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$.

Étude en $+\infty$: par croissance comparée,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi_{a,b}(t) = 0$$

Donc $\varphi_{a,b}(t) = o(1/t^2)$. Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$).

Donc, par théorème de comparaison, $\int_0^{+\infty} \varphi_{a,b}(t) dt$ converge.

9) Sur $\mathbb{R}$, la fonction g est paire car $x \mapsto x^2$ l'est. Donc la question 8, où nous avons montré que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, entraîne

$$\text{La fonction } g \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^*$$

10) Soit $x > 0$. Il vous manquait l'expression de g' , donc cette question n'était pas faisable – désolé pour ce trou dans l'énoncé.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} -2xe^{-x^2t^2} e^{ix^2} dt \\ &= -2e^{ix^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2} x dt \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $u = xt$, $\mathcal{C}^1$ strictement croissant ($x > 0$) et bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Le théorème de changement de variable nous dit que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2} x dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ sont de même nature, convergentes d'après 10 et l'énoncé, et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2t^2} x dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Ainsi,

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$$

11) a) Vous avez droit au cercle trigo. Par contre, vous n'avez pas le droit... de ne pas trouver.

$$\boxed{|i| = 1 \quad \text{et} \quad \arg(i) = \frac{\pi}{2}}$$

b) Une racine carrée de i sera, par exemple, $z = e^{i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Vérifions : $z^2 = e^{2i\pi/4} = e^{i\pi/2} = i$ d'après ci-dessus.

Alors $X^2 - i = X^2 - z^2 = (X - z)(X + z)$, et il existe $A, B \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\frac{1}{X^2 - i} = \frac{A}{X - z} + \frac{B}{X + z}$$

En multipliant par $X - z$, il vient $\frac{1}{X + z} = A + \frac{B(X - z)}{X + z}$. Puis on fait tendre $X \rightarrow z$:

$$\frac{1}{2z} = A + 0$$

Or $z = e^{i\pi/4}$, donc $\frac{1}{2z} = \frac{1}{2}e^{-i\pi/4}$, donc

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - i)$$

De même, en multipliant par $X + z$ puis en faisant tendre $X \rightarrow -z$, il vient

$$B = -\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - i)$$

D'où

$$\boxed{\frac{1}{X^2 - i} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - i) \left(\frac{1}{X - z} - \frac{1}{X + z} \right)}$$

c) • Valeur de $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} dt$:

Nature : $\Delta = 2 - 4 = -2 < 0$ donc le dénominateur ne s'annule pas, et l'intégrale converge en $+\infty$ et $-\infty$ par comparaison à une intégrale de Riemann ($\alpha = 2 > 1$). Pour une intégrale généralisée, toujours commencer par étudier la nature. Ici, on vous demande la valeur de l'intégrale : on peut étudier la nature très rapidement, surtout que l'on a déjà montré que l'on savait faire ce genre d'étude dans les questions qui précèdent.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} &= \frac{1}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1} \\ &= \frac{2}{2\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{2}{(\sqrt{2}t - 1)^2 + 1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{(\sqrt{2}t - 1)^2 + 1} dt \\ &= \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t - 1)^2 + 1} dt \\ &= \sqrt{2} \left[\text{Arctan}(\sqrt{2}t - 1) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

On reconnaît $\frac{u'}{1 + u^2}$, on veut du $\sqrt{2}$ au numérateur

$$\text{Or } \lim_{+\infty} \text{Arctan} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{-\infty} \text{Arctan} = -\frac{\pi}{2}$$

- Valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt$:

Le changement de variable $u = -t$ est $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant et bijectif de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc le théorème nous donne la nature équivalente (donc convergente d'après ci-dessus) des intégrales, et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt = - \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{1}{(-u)^2 - \sqrt{2}u + 1} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 - \sqrt{2}u + 1} du$$

Ainsi,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} dt = \pi\sqrt{2}}$$

- Calcul de $g(0)$: *C'est calculatoire : soyez méthodique et rigoureux dans votre présentation, pour pouvoir vous relire, ne serait-ce que d'une ligne à la suivante. Et en présentant méthodiquement, on voit apparaître les symétries des formules.*

On remarque que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} dt$ divergent. On calcule, à part du reste de la formule, ces intégrales. La différence des deux fractions rationnelles est équivalente à $\frac{C}{t^2}$ (ou bien elle est égale à $g(0)$ moins les autres intégrales, qui, elles, convergent).

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} dt$ converge et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} dt &= \left[\ln |t^2 - t\sqrt{2} + 1| - \ln |t^2 + t\sqrt{2} + 1| \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \left[\ln \left| \frac{t^2 - t\sqrt{2} + 1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \right| \right]_{-\infty}^{+\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{t^2 - t\sqrt{2} + 1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} &\sim_{\pm\infty} \frac{t^2}{t^2} = 1 \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} 1 \\ &= \ln(1) - \ln(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}$ est impaire, donc on pouvait s'épargner le calcul et conclure immédiatement que son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle par symétrie.

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - i} dt \\ &= \frac{1-i}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t - \sqrt{2}}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{2t + \sqrt{2}}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} dt \right. \\ &\quad \left. + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} dt + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} dt \right) \\ &= \frac{1-i}{4} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times 0 + i \times 2 \times \pi\sqrt{2} \right) \\ &= \boxed{\frac{i+1}{\sqrt{2}}\pi} \end{aligned}$$

- 12)** Vous pouvez garder un peu de temps à la fin pour chercher les éventuelles questions faciles qui se trouveraient en fin de sujet. Normalement, la difficulté du sujet est progressive, mais parfois on ne peut pas, mathématiquement, éviter de laisser des questions faciles assez loin dans le sujet. Typiquement, cette question est partiellement facile : il suffit d'intégrer la dérivée trouvée à la question 10 — et d'admettre la valeur de $g(0)$.

D'après la question 10, pour tout $x > 0$, $g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}$. Donc, en intégrant entre $\varepsilon > 0$ et $x > 0$, il vient, par définition de H

$$g(x) = g(\varepsilon) - 2\sqrt{\pi}(H(x) - H(\varepsilon))$$

La formule n'est vraie que pour $x > 0$, il faut donc prendre ses précautions.

Or, d'après la question 7, g est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0, et d'après la question 1 H est continue sur $\mathbb{R}$ donc en 0 : en prenant la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, il vient

$$g(x) = g(0) - 2\sqrt{\pi}H(x)$$

D'après 11c, on a donc

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \times H(x)$$

- Valeur de $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$: Cette intégrale converge d'après la question 5.

Par définition de H , $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$. De plus, d'après la question 8, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

Donc, en prenant la limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ dans la formule ci-dessus, il vient

$$0 = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$$

Ainsi,

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

- Valeur des intégrales de Fresnel : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, donc nous venons d'écrire

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) + i \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Par linéarité et continuité des fonctions $z \mapsto \Re(z)$ et $z \mapsto \Im(z)$, les intégrales convergent et valent

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Partie III - Etude d'une série de fonctions

- 13) a)** Cette égalité s'appelle une transformation d'Abel, c'est une sorte d'intégration par parties pour les suites : posons $I : (u_n) \mapsto \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)$, $D : (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$ et $s : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$, linéaires. On remarque que $D \circ I = \text{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$, $I \circ D((u_n)) = (u_n - u_0)$ comme pour la dérivation et l'intégration. En notant $\tilde{u} = s(u)$, on a

$$D(uv) = D(u)\tilde{v} + uD(v)$$

Ce qui nous permet de retrouver une formule d'intégration par parties pour les séries, en composant par I à gauche.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) &= \sum_{n=1}^N a_n b_n - \sum_{n=1}^N a_n b_{n-1} \\
 &= \sum_{n=1}^N a_n b_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} b_n && \text{Savoir décaler les indices !} \\
 &= \sum_{n=1}^N a_n b_n - \left[a_1 b_0 + \sum_{n=1}^N a_{n+1} b_n - a_{N+1} b_N \right] && \text{Les pointillés sont vos amis} \\
 &= \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0
 \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0$$

b) Le CSSA est une conséquence, un cas particulier, du résultat de cette question. On prend la suite bornée

$$b_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$$

- Étude de $\sum (a_n - a_{n+1})$:

(a_n) est décroissante donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n - a_{n+1} \geq 0}$

De plus, $\sum (a_n - a_{n+1})$ est une série télescopique :

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{N+1}$$

Donc l'existence de $\lim_{N \rightarrow +\infty} a_{N+1}$ entraîne la convergence de la série :

$$\boxed{\text{La série } \sum (a_n - a_{n+1}) \text{ converge}}$$

- Convergence de $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$:

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. D'après la transformation d'Abel obtenue en 13a,

$$\sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0$$

Montrons que chacun des termes du membre de droite a une limite quand $N \rightarrow +\infty$.

- Soit $u_n = (a_n - a_{n+1}) b_n$. Comme $(a_n - a_{n+1})$ est positive et (b_n) bornée (par exemple, $|b_n| \leq M$ avec $M \in \mathbb{R}$),

$$\begin{aligned}
 |u_n| &= |a_n - a_{n+1}| \times |b_n| \\
 &\leq (a_n - a_{n+1}) M
 \end{aligned}$$

Or $\sum (a_n - a_{n+1})$ converge d'après ci-dessus.

Donc, d'après le théorème de majoration, $\sum u_n$ converge absolument, donc converge.

Ainsi, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n$ existe et est finie.

o Par hypothèse, $\lim_{N \rightarrow +\infty} a_{N+1} = 0$ et $|a_{N+1}b_N| \leq M|a_{N+1}|$.

Donc, par majoration, $\lim_{N \rightarrow +\infty} a_{N+1}b_N$ existe.

Attention : $|\sin n| \leq 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ mais, comme vous le savez, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ n'existe.

o $-a_1b_0$ est une constante.

Conclusion, la limite des sommes partielles existe comme somme de limites finies, ainsi

La série $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$ converge

Dans ce genre de question aux multiples hypothèses, tout sert. Vous pouvez donc vérifier que vous avez utilisé toutes les hypothèses. Sinon, vous avez sans doute oublié un argument à un endroit. Par exemple, pour la convergence de $\sum u_n$, il faut mettre des valeurs absolues (pour le théorème de majoration) mais les enlever autour de $a_n - a_{n+1}$ (pour la convergence de $\sum (a_n - a_{n+1})$).

- 14) *Tactique : encore une question abordable, garder un peu de temps pour la faire. Par contre, attention aux bornes de la somme : si vous ne trouvez pas le bon résultat, ne tordez pas les formules (2 erreurs = 2 fois plus de points perdus). Passez par des pointillés, vous auriez sans doute remarqué que la somme commençait à $k = 1$.*

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(k+1)x}$$

Une somme fréquentable commence à $k = 0$

$$= e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{ix})^k$$

Or $q = e^{ix} \neq 1$ car $x \in]0, 2\pi[$

$$= e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}$$

Somme géométrique avec $q \neq 1$

$$= \frac{e^{ix} e^{i\frac{nx}{2}} (e^{-i\frac{nx}{2}} - e^{i\frac{nx}{2}})}{e^{i\frac{x}{2}} (e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})}$$

$$= \frac{e^{i(1+\frac{n}{2}-\frac{1}{2})x} (-2i \sin \frac{nx}{2})}{-2i \sin \frac{x}{2}}$$

$$= e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

Conclusion,

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

- 15) *Il faut être méthodique. On vous dit tout : appliquer à $\sum \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ la question 13b (celle des deux qui parle de convergence), i.e. $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$ converge. La question est : qui est (a_n) et qui est $(b_n - b_{n-1})$? On veut que (a_n) soit positive, décroissante et de limite nulle : il n'y a plus beaucoup de choix naturel. Soit $x \in]0, 2\pi[$. Posons,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \sum_{k=1}^n e^{ikx}$$

D'après 14, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$ donc

$$|b_n| = \left| \frac{\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})} \right| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

Donc (b_n) est bornée.

De plus, (a_n) est positive, décroissante et de limite nulle, donc, d'après 13b, $\sum a_n(b_n - b_{n-1})$ converge.

Or, pour tout $n \geq 1$, $a_n(b_n - b_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} - \sum_{k=1}^{n-1} e^{ikx} \right) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

Ainsi, nous venons de montrer la convergence de $\sum \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$:

La fonction S est définie sur $]0, 2\pi[$

16) *Tactique : encore une question abordable, surtout la (non) convergence absolue.*

- Non convergence absolue : Pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$\left| \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} \right| = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Or, d'après Riemann, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ diverge ($\alpha = 1/2 \leq 1$). Donc

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$ ne converge pas absolument

- *C'est une question typique d'un problème de concours — par opposition aux petits exercices : il faut savoir relire les questions précédentes.*

D'après la question 3,

$$H(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$$

Et d'après 5, $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$ existe. D'où $\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du$ converge.

Effectuons le changement de variable $u = xt$, $\mathcal{C}^1$, strictement croissant ($x > 0$) et bijectif de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$. Le théorème de changement de variable nous dit que les intégrales suivantes sont de même nature :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{xt}} x dt$$

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\sqrt{t}} dt$ converge et

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$ converge

De plus,

$$\sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt = \int_x^{+\infty} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt - H(\sqrt{x})$$

17) Soit $x \in]0, 2\pi[$. Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_k = \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$$

Ainsi,

$$|u_k| \leq \frac{1}{4k^{3/2}}$$

La série de Riemann $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge ($\alpha = 3/2 > 1$), donc, par théorème de majoration, $\sum u_k$ converge absolument donc converge. De plus, en sommant la majoration,

$$\forall n \geq 1 \quad \left| \sum_{k=1}^n u_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |u_k| \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} = C$$

La constante C ne dépend pas de x , donc elle est valable pour tout $x \in]0, 2\pi[$. De plus

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{ix} \left(\sum_{k=1}^n \frac{e^{i(k+1)x}}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}} \right) - \int_1^{n+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{ix} \left(e^{ix} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^n \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}} \right) - \int_1^{n+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \end{aligned}$$

Comme l'intégrale converge d'après la question 16, et les séries convergent vers $S(x)$ d'après la question 15, on passe à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{ix} \left(e^{ix} S(x) - S(x) \right) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$$

Ainsi, la majoration obtenue ci-dessus, lorsque $n \rightarrow +\infty$ s'écrit

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C$$

Comme C est indépendant de x , il vient

$$\boxed{\exists C > 0, \forall x \in]0, 2\pi[, \left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C}$$

18) D'après le changement de variable effectué à la question 16,

$$\sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt - H(\sqrt{x})$$

Or H est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto H(\sqrt{x})$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Comme $H(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} H(\sqrt{x}) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$$

D'après la question 12,

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) \text{ existe et vaut } \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

19) *Tactique : une limite, vous savez faire ! $\sim$, o ou $\leq$.*

Comme $e^{ix} = 1 + ix + o(ix)$ en $x = 0$, il vient

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{ix} - 1}{ix} = 1}$$

D'après la question 18, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ donc

$$\sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1)$$

La majoration de la question 17 s'écrit

$$\frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt = O(1)$$

D'où, toujours lorsque $x \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt + O(1) \\ &= \left(\frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + o(1) \right) \frac{1}{\sqrt{x}} + O(1) \\ &= \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \text{Car } \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ non bornée au voisinage de } 0^+ \\ &\sim \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \end{aligned}$$

Comme $\frac{e^{ix} - 1}{ix} \sim 1$ d'après ci-dessus,

$$\boxed{S(x) \sim \frac{1+i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}}$$

Exercice 2 (Centrale MP 1 2026, partie I, très partiel)

1 Groupes d'exposant fini

- 1) Montrons que $m = \text{Card}(G)$ convient. Soit $x \in G$. L'ordre d'un élément divise le cardinal du groupe : en notant $d \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de x , on a $\text{Card } G = dq$ et

$$x^{\text{Card}(G)} = x^{dq} = e^q = e$$

Donc

$$\boxed{G \text{ est d'exposant fini}}$$

- 2) *Comment trouver ? Déjà, on cherche par exemple un groupe où $x^2 = 0$ pour tout $x \in G$. En notation additive, $2x = 0 : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Mais il n'est pas infini : prenons des suites, il sera forcément infini.*

Posons $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ muni de l'addition. Il est infini car il contient $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ la suite nulle sauf au i -ième terme, où elle vaut 1 : il y a un nombre dénombrable de telles suites. Donc G est de cardinal au moins dénombrable⁴. Ainsi

$$\boxed{((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}, +) \text{ est un groupe infini d'exposant } 2.}$$

4. On peut montrer que $\text{Card}((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}})$ est strictement plus que dénombrable.

2 Croissance d'un groupe

1) Inverse : Soit $g \in G$. Soient $k \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ et $(s_1, \dots, s_k) \in \mathcal{S}^k$ tels que

$$\ell_{\mathcal{S}}(g) = \sum_{i=1}^k |a_i| \quad \text{et} \quad g = s_1^{a_1} \dots s_k^{a_k}$$

Alors, en posant $g' = s_k^{-a_k} \dots s_1^{-a_1}$,

$$gg' = g'g = e$$

Donc $g' = g^{-1}$. De plus, on vient d'écrire g^{-1} avec des éléments de $\mathcal{S}$, donc, par définition du minimum,

$$\ell_{\mathcal{S}}(g^{-1}) \leq \sum_{i=1}^k |-a_i| = \ell_{\mathcal{S}}(g)$$

En appliquant ce résultat à g^{-1} , il vient $\ell_{\mathcal{S}}((g^{-1})^{-1}) = \ell_{\mathcal{S}}(g) \leq \ell_{\mathcal{S}}(g^{-1})$. Ainsi,

$$\boxed{\forall (g, h) \in G^2, \quad \ell_{\mathcal{S}}(g^{-1}) = \ell_{\mathcal{S}}(g)}$$

Produit : Soient $(g, h) \in G^2$. Soient $k, k' \in \mathbb{N}^2$, $\left\{ \begin{array}{ll} (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k & \text{et} \quad (s_1, \dots, s_k) \in \mathcal{S}^k \\ (b_1, \dots, b_{k'}) \in \mathbb{Z}^{k'} & \text{et} \quad (t_1, \dots, t_{k'}) \in \mathcal{S}^{k'} \end{array} \right.$ tels que

$$\ell_{\mathcal{S}}(g) = \sum_{i=1}^k |a_i|, \quad g = s_1^{a_1} \dots s_k^{a_k} \quad \text{et} \quad \ell_{\mathcal{S}}(h) = \sum_{i=1}^{k'} |b_i|, \quad h = t_1^{b_1} \dots t_{k'}^{b_{k'}}$$

Alors $gh = s_1^{a_1} \dots s_k^{a_k} t_1^{b_1} \dots t_{k'}^{b_{k'}}$, donc

$$\ell_{\mathcal{S}}(gh) \leq \sum_{i=1}^k |a_i| + \sum_{i=1}^{k'} |b_i| = \ell_{\mathcal{S}}(g) + \ell_{\mathcal{S}}(h)$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall (g, h) \in G^2, \quad \ell_{\mathcal{S}}(gh) \leq \ell_{\mathcal{S}}(g) + \ell_{\mathcal{S}}(h)}$$

2) Encadrement : Si G est réduit à l'élément neutre e , alors $\ell_{\mathcal{S}}(g) = \ell_{\Sigma}(g) = 0$ pour tout $g \in G$, et tout choix de constante $C > 0$ et $C' > 0$ convient.

Sinon, $G \neq \{e\}$. Soit $g \in G$. Soient $k \in \mathbb{N}$, $(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}^k$ et $(s_1, \dots, s_k) \in \mathcal{S}^k$ tels que

$$\ell_{\mathcal{S}}(g) = \sum_{i=1}^k |a_i| \quad \text{et} \quad g = s_1^{a_1} \dots s_k^{a_k}$$

Posons $C' = \max\{\ell_{\Sigma}(s) \mid s \in \mathcal{S}\}$, bien définie car $\mathcal{S}$ finie, et strictement positive car $\mathcal{S} \neq \{e\}$.

Alors, en notant $\varepsilon_i = -1$ si $a_i < 0$ et $\varepsilon_i = +1$ si $a_i \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$\ell_{\Sigma}(g) = \ell_{\Sigma}(s_1^{a_1} \dots s_k^{a_k})$$

$$\leq \sum_{i=1}^k \ell_{\Sigma}(s_i^{a_i})$$

D'après 2.1

$$\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \ell_{\Sigma}(s_i^{\varepsilon_i})$$

Idem, avec une récurrence

$$\leq \sum_{i=1}^k |a_i| \ell_{\Sigma}(s_i)$$

Car $\ell_{\Sigma}(g^{-1}) = \ell_{\Sigma}(g)$

$$\leq C' \sum_{i=1}^k |a_i|$$

Par définition de C'

$$\leq C' \ell_{\mathcal{S}}(g)$$

Car $\ell_{\mathcal{S}}(g) = \sum_{i=1}^k |a_i|$

Par symétrie des rôles joués par $\mathcal{S}$ et Σ , il vient

$$\ell_{\mathcal{S}}(g) \leq C_{\mathcal{S}} \ell_{\Sigma}(g) \quad \text{avec} \quad C_{\mathcal{S}} = \max\{\ell_{\Sigma}(s) \mid s \in \mathcal{S}\} > 0$$

En posant $C = 1/C_{\mathcal{S}} > 0$, et en remarquant que C et C' ne dépendent pas du choix de g ,

$$\boxed{\exists C \in \mathbb{R}_+^*, \exists C' \in \mathbb{R}_+^*, \forall g \in G, \quad C \ell_{\mathcal{S}}(g) \leq \ell_{\Sigma}(g) \leq C' \ell_{\mathcal{S}}(g)}$$

Croissance polynomiale : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On remarque que $\text{Card}(\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p)) \leq \text{Card}(\mathcal{S})^p$: $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p)$ est fini. Les constantes C et C' trouvées ci-dessus sont des entiers, donc parler de $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(C'p)$ (etc) a un sens. Montrons que $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p) \subset \mathcal{V}_{\Sigma}(C'p)$: Soit $g \in G$.

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p) &\implies \ell_{\mathcal{S}}(g) \leq p \\ &\implies \ell_{\Sigma}(g) \leq C' \ell_{\mathcal{S}}(g) \leq C'p \\ &\implies g \in \mathcal{V}_{\Sigma}(C'p) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p) \subset \mathcal{V}_{\Sigma}(C'p)$. *Montrer une inclusion doit être de la routine, y compris la rédaction.*

Montrons que $\mathcal{V}_{\Sigma}(Cp) \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p)$: Soit $g \in G$.

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{V}_{\Sigma}(Cp) &\implies C \ell_{\mathcal{S}}(g) \leq \ell_{\Sigma}(g) \leq Cp \\ &\implies \ell_{\mathcal{S}}(g) \leq p && \text{Car } C > 0 \\ &\implies g \in \mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{V}_{\Sigma}(Cp) \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p)$. Ainsi,

$$\mathcal{V}_{\Sigma}(Cp) \subset \mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p) \subset \mathcal{V}_{\Sigma}(C'p)$$

Conclusion : Supposons G à croissance polynomiale de degré $d \in \mathbb{N}$ pour Σ , et notons $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \alpha p^d \leq |\mathcal{V}_{\Sigma}(p)| \leq \beta p^d$$

En passant aux cardinaux, les inclusions précédentes nous donnent

$$\alpha C^d p^d \leq |\mathcal{V}_{\Sigma}(Cp)| \leq |\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p)| \leq |\mathcal{V}_{\Sigma}(C'p)| \leq \beta C'^d p^d$$

Donc, avec $\alpha' = \alpha C^d$ et $\beta' = \beta C'^d$, G est aussi à croissance polynomiale de degré d pour $\mathcal{S}$.

En conclusion,

Le fait que G soit un groupe à croissance polynomiale de degré d ne dépend pas du système $\mathcal{S}$ de générateurs choisis.

Exercice 3 (Centrale MP 1 2024, partie I)

Exercice 4 (X-ENS MP C 2024 – partiel)

1 Lemme de Cesàro

1) $u_n - \ell = o(1)$ et $\sum 1$ est une série divergente positive, donc, par théorème de sommation des équivalents,

$$\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = o(n)$$

Or $\sum_{k=0}^n (u_k - \ell) = \left(\sum_{k=0}^n u_k \right) - (n+1)\ell$, d'où $\sigma_n - \ell = o(1)$ puis

$$\boxed{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \right)}$$

- 2) • Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$: Par définition de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$,

$$\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, u_n \geq A$$

Soit $A > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ qui convient.

$$\begin{aligned} \forall n \geq n_0, \quad \sigma_n &= \frac{1}{n+1} \left[\sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n \underbrace{u_k}_{\geq A} \right] && \text{Par définition de } n_0 \\ &\geq \frac{C}{n+1} + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} A && \text{Avec } C = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k \text{ constant par rapport à } n \end{aligned}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C}{n+1} + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} A = A.$$

On va écrire la définition de la limite ci-dessus avec des eps, et donc avoir une expression $|v_n - A| \leq \varepsilon$.

Quel ε prendre ? Dans le calcul général, le but est de minorer $v_n = \frac{C}{n+1} + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} A$ par A , ou, à défaut, par $A/2$ ou par une fraction de A .

Avec $\varepsilon = A/2$, il existe n_1 tel que, $\forall n \geq n_1$,

$$A - \frac{A}{2} \leq \frac{C}{n+1} + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} A \leq A + \frac{A}{2}$$

Soit $n_1 \geq n_0$ qui convient :

$$\forall n \geq n_1, \quad \sigma_n \geq \frac{C}{n+1} + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} A \geq \frac{A}{2}$$

Ainsi, nous venons de montrer que

$$\boxed{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = +\infty \right)}$$

- Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$:

Comme $(-u_n)$ a pour limite $+\infty$, d'après ci-dessus $(-\sigma_n) = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n -u_k \right)$ a pour limite $+\infty$.

Ainsi,

$$\boxed{\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = -\infty \right)}$$

Applications

- 3) a) Posons $u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = v_{n+1}$. D'après le théorème de Cesàro,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0}$$

b) Par décroissance de $u \mapsto \frac{1}{u}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
& \forall k \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [k, k+1], & \frac{1}{k+1} &\leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k} \\
\Rightarrow & \forall k \in \mathbb{N}^*, & \frac{1}{k+1} &= \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dt = \frac{1}{k} \quad (\text{croissance de } \int) \\
\Rightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, & \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} &\leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
\Rightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, & \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} &\leq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq nv_n \\
\Rightarrow & \forall n \in \mathbb{N}^*, & (n+1)v_{n+1} - 1 &\leq \ln(n+1) \leq nv_n
\end{aligned}$$

(On rajoute le terme manquant pour faire apparaître v_{n+1}).

$$\Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} nv_n - 1 \leq \ln(n) \\ \ln(n+1) \leq nv_n \end{cases}$$

(On décale les indices à gauche. Écrire les inégalités pour $n = 1, 2, 3, 4$ pour comprendre).

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, & \ln(n+1) &\leq nv_n \leq \ln(n) + 1 \\
\Rightarrow & \quad \forall n \geq 2, & \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} &\leq \frac{n}{\ln(n)} v_n \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}
\end{aligned}$$

Or $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + 1/n) = \ln(n) + o(1)$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$.

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(n)} v_n = 1$, et

$$\boxed{v_n \sim \frac{\ln(n)}{n}}$$

4) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^n e_k = \sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$$

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \alpha$. Donc, d'après le théorème de Césàro, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n e_k = \alpha$:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n e_k = \alpha + o(1)$$

Or $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n e_k = \frac{u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_0}{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} + o(1)$, car $\left(\frac{u_0}{n+1}\right)$ est de limite nulle.

Donc l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n e_k + o(1) = \alpha + o(1)$$

Or $\alpha \neq 0$, donc, en décalant les indices ($\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n/n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}/(n+1) = \alpha$)

$$\frac{u_n}{n} \sim \alpha$$

Ainsi,

$$\boxed{u_n \sim \alpha n}$$

- 5) Dans cette question, nous avons des quotient ou des racines n -ième, alors qu'il était question de sommes. De plus, les termes sont strictement positifs : le logarithme nous tend les bras, qui va transformer les produits en sommes, etc.

a) Posons $u'_n = \ln u_n$, bien défini car $u_n > 0$. Par continuité de $\ln$, et comme $\ell > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u'_{n+1} - u'_n) = \ln \ell$$

D'après Césaro, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (u'_{k+1} - u'_k) = \ln \ell$.

La somme étant télescopique, et comme, de même qu'au 4b, $\frac{u'_0}{n} = o(1)$, il vient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u'_n}{n} = \ln \ell$.
Par continuité de l'exponentielle,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell}$$

- b) « En déduire » : vous pouvez toujours voir si vous réussissez à appliquer le résultat de la question précédente – i.e. vérifier les hypothèses pour le bon u_n . Même si vous n'avez pas su faire la question précédente.

Posons $u_n = \frac{n^n}{n!} > 0$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- Limite de (u_{n+1}/u_n) : Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= e^{n \ln(1+1/n)} \end{aligned}$$

Or $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$, donc, par continuité de l'exponentielle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e$$

- Conclusion : D'après 5a,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e}$$

- c) Avec les notations de la question 5a.

Le cas $\ell = 0$ correspond au cas $\ell = -\infty$ de Césaro, prouvé au 2. Comme $u'_0/n = o(1)$, (u'_n/n) diverge vers $-\infty$, puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0 = \ell$$

Le cas $\ell = +\infty$ correspond au cas $\ell = +\infty$ de Césaro, et se traite de même. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le résultat de la question 5a subsiste si } \ell = 0 \text{ ou } \ell = +\infty.}$$

- d) Posons $u_n = n!$. Comme $u_{n+1}/u_n = n+1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$, le cas $\ell = +\infty$ de la question 5a nous donne

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty}$$

- 6) • Supposons $a = b = 0$: C'est sans doute la question la plus délicate de l'exercice, ne pas hésiter à la laisser pour la fin.

Posons $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|a_n| \leq \varepsilon$ et $|b_n| \leq \varepsilon$. Soit n_0 qui convienne.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2n_0, \quad |v_n| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n |a_k b_{n-k}| \\ &\leq \frac{1}{n} \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| |b_{n-k}|}_{(*)} + \sum_{k=n_0}^n \underbrace{|a_k|}_{\leq \varepsilon} |b_{n-k}| \right] \end{aligned}$$

Pour $(*)$, comme $k < n_0$ et $n \geq 2n_0$, alors $n - k \geq 2n_0 - n_0 = n_0$: $|b_{n-k}| \leq \varepsilon$

$$\leq \frac{1}{n} \left[\varepsilon \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^n |b_{n-k}| \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \forall n \geq 2n_0, \quad \sum_{k=n_0}^n |b_{n-k}| &= \sum_{k=0}^{n-n_0} |b_k| \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{n_0-1} |b_k|}_{=A} + \sum_{k=n_0}^{n-n_0} \underbrace{|b_k|}_{\leq \varepsilon} \quad \text{Avec } A \text{ constante par rapport à } n \end{aligned}$$

D'où, avec $B = \sum_{k=0}^{n_0-1} |a_k|$ constante par rapport à n aussi,

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2n_0, \quad |v_n| &\leq \frac{1}{n} \left[\varepsilon B + \varepsilon A + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{n-n_0} \varepsilon \right] \\ &\leq \frac{(A+B)\varepsilon}{n} + \frac{n-2n_0+1}{n} \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Avec $\varepsilon < 1$ (que l'on peut imposer sans perte de généralité), et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(A+B)\varepsilon}{n} = 0$, il vient l'existence de $n_1 \geq 2n_0$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \quad |v_n| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = 0$$

- Cas général : Posons $a'_n = a_n - a$ et $b'_n = b_n - b$. En remplaçant,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (a + a'_k)(b + b'_{n-k}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n ab + a'_k b + ab'_{n-k} + a'_k b'_{n-k} \\ &= \frac{n}{n} ab + \frac{b}{n} \sum_{k=0}^n a'_k + \frac{a}{n} \sum_{k=0}^n b'_{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a'_k b'_{n-k} \end{aligned}$$

Or, d'après Cesàro, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a'_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} a'_n = 0$.

Et, après changement d'indice, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n b'_{n-k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} b'_n = 0$.

De plus, d'après ci-dessus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a'_k b'_{n-k} = 0$.

Donc, en conclusion,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = ab$$

Réciproques partielles

7) Posons $u_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$, la suite (u_n) ne converge pas.

$$\text{De plus, pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \sigma_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^n [(-1)^{2k} + (-1)^{2k+1}] = 0 \\ \sigma_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k = \frac{1}{2n} \underbrace{\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k}_{=0} + 1 = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}.$$

Comme les suites extraites des termes pairs et impairs ont la même limite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = 0$. Ainsi,

La réciproque du théorème de Cesàro n'est pas toujours vraie

Preuve de : Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ont une même limite ℓ , alors (u_n) converge.

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit $n \geq 2n_0 + 1$. Si $n = 2p + 1$ est impair, alors $p \geq n_0$ et $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Si non, $n = 2p$ est pair, et $p \geq n_0$, donc $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$.

Ainsi, $\forall n \geq 2n_0 + 1$, $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$. En conclusion

(u_n) converge

8) Cas d'une limite réelle : Soit (u_n) une suite monotone telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \in \mathbb{R}$.

Quitte à considérer $(-u_n)$, on suppose (u_n) croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, si (u_n) est majorée, alors elle converge. Et si (u_n) n'est pas majorée, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Dans les deux cas, le théorème de Cesàro nous dit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

Nous venons de prouver que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \quad \text{et} \quad (u_n) \text{ monotone} \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right)$$

Cas d'une limite infinie : Soit (u_n) une suite monotone telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n \in \{-\infty, +\infty\}$.

Comme (u_n) est monotone, par le théorème de la limite monotone elle converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, donc par le théorème de Cesàro (σ_n) converge aussi vers la même limite ℓ .

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n \in \{-\infty, +\infty\}$. Ainsi,

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \quad \text{et} \quad (u_n) \text{ monotone} \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right)$$

On pouvait directement adapter la preuve du cas réel : le théorème de la limite monotone nous prouve que (u_n) monotone a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, et Cesàro que, si (u_n) a une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors (σ_n) aussi, et elles sont identiques.

9) Théorème de Hardy faible.

a) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k e_k &= \sum_{k=0}^n [k u_{k+1} - k u_k] \\ &= \sum_{k=0}^n k u_{k+1} - \sum_{k=0}^n k u_k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) u_k - \sum_{k=1}^n k u_k && \text{Décalage d'indices, et } 0 \times u_0 = 0 \\ &= n u_{n+1} + \sum_{k=1}^n [(k-1) u_k - k u_k] \\ &= n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=0}^n k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k$$

Toujours la même idée : télescopique ? Télescopique ! (décalage d'indices, ce qui est la même chose).

b) Il y a une question a : se laisser porter par cette indication.

Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell$ et que $e_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. Soit $n \geq 1$. D'après a), en divisant par n ,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k e_k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

Or $k e_k = o(1)$, c'est-à-dire $\lim_{k \rightarrow +\infty} k e_k = 0$. Donc le théorème de Cesàro (appliqué à la suite $u'_n = (n+1)e_{n+1}$) nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k e_k = 0$$

De plus, (u_n) converge vers ℓ , donc le théorème de Cesàro, appliqué à $u'_n = u_{n+1}$, nous donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \ell$$

Ainsi, (u_{n+1}) converge vers $0 + \ell$. Finalement,

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \quad \text{et} \quad e_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right)$$

10) a) Les formules du 9a et du 10a se ressemblent : pourrait-on déduire 10a de 9a ? Il faut essayer, faisant apparaître un membre de 10a d'un côté, et si l'idée fonctionne, tout va se simplifier dans l'autre membre.

D'après 9a en n et m ,

$$\sum_{k=0}^n ke_k = nu_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^m ke_k = mu_{m+1} - \sum_{k=1}^m u_k$$

En soustrayant, il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m ke_k &= mu_{m+1} - nu_{n+1} - \sum_{k=n+1}^m u_k \\ &= (m-n)u_n - \sum_{k=n+1}^m u_k + m(u_{m+1} - u_n) - nu_{n+1} \end{aligned}$$

D'où (on écrit le membre de gauche de l'égalité en passant ce qu'il faut du bon côté)

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n &= - \sum_{k=n+1}^m ke_k + m(u_{m+1} - u_n) - nu_{n+1} \quad \text{Or } u_{m+1} - u_n = \sum_{j=n}^m e_j \\ &= - \sum_{j=n}^m je_j + m \sum_{j=n}^m e_j \\ &= \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j}$$

- b) Par définition du grand O , $e_n = O(1/n)$ nous donne l'existence de $C > 0$ telle que $|e_n| \leq C/n$ pour tout $n \geq 1$. Soit un tel $C > 0$.

Soit $1 \leq n < m$. D'après 10a,

$$(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| &= \frac{1}{m-n} \left| \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j \right| \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \frac{m-j}{m-n} |e_j| \quad \text{Or } \frac{m-j}{m-n} \leq 1 \text{ et } |e_j| \leq \frac{C}{j} \\ &\leq C \sum_{j=n}^{m-1} \frac{1}{j} \quad \text{Or } n \geq 2 \text{ donc } \frac{1}{j} \leq \int_{j-1}^j \frac{1}{t} dt \\ &\leq C \int_{n-1}^{m-1} \frac{1}{t} dt = C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi,

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leq n < m$ on a

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right)$$

et (méthode du $+1-1$, comme pour le théorème de continuité avec convergence uniforme)

$$\begin{aligned}
 |u_n - \ell| &\leq \left| u_n - \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} \right| + \left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - \ell \right| \\
 &\leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \left| \frac{(m+1)(\sigma_m - \ell) - (n+1)(\sigma_n - \ell)}{m-n} \right| \\
 &\leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} |\sigma_m - \ell| + \frac{n+1}{m-n} |\sigma_n - \ell|
 \end{aligned}$$

Et finalement, comme $n+1 < m+1$,

$$\boxed{|u_n - \ell| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} (|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|)}$$