

Épreuve de Mathématiques 2

Durée 4 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites
--

Exercice 1 (d'après CCINP)

Dans ce problème, on étudie certaines intégrales et séries numériques reliées aux intégrales dites de Fresnel. Augustin Fresnel (1788-1827) démontra le caractère ondulatoire de la lumière et, pour cette raison, il est considéré comme un des fondateurs de l'optique moderne.

On note i le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

Partie I - Intégrales fonctions de leur borne

Dans cette partie, on définit la fonction H par l'expression $H(x) = \int_0^x e^{it^2} dt$, où e^{it^2} signifie $\exp(it^2)$

- 1) Démontrer que H est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donner une expression de $H'(x)$.
- 2) Étudier la parité de la fonction H .
- 3) Si $x > 0$, démontrer que :

$$H(x) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{e^{iu}}{\sqrt{u}} du.$$

- 4) Pour $x > \sqrt{2\pi}$, en déduire que :

$$H(x) - H(\sqrt{2\pi}) = -i \frac{e^{ix^2}}{2x} + \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{i}{4} \int_{2\pi}^{x^2} \frac{e^{iu}}{u^{\frac{3}{2}}} du.$$

- 5) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ converge.

Partie II - Calcul des intégrales de Fresnel

Dans cette partie, on étudie la fonction g d'expression :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i} dt.$$

Pour cela, on pose $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(t^2-i)}}{t^2-i}$.

- 6) Si $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, déterminer les modules des nombres complexes $e^{-x^2(t^2-i)}$ et $t^2 - i$.
- 7) a) Montrer que g peut s'exprimer en fonction d'une intégrale entre 0 et $+\infty$.
b) Trouver $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ intégrable telle que,

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

- c) En déduire que g est définie sur $\mathbb{R}$. On admet qu'un théorème du cours nous montrera qu'elle est aussi continue sur $\mathbb{R}$. Et qu'on peut déterminer les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$: on trouve que g a une limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$.
- 8) Déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$.

Soit $0 < a < b$ deux réels. Trouver $\varphi_{a,b}$ intégrable sur $[0, +\infty[$ telle que,

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall t \in [0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

On admet qu'avec un théorème que l'on verra plus tard en cours, on peut en déduire que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

- 9) En déduire que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- 10) On admet dans cette question que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge et est égale à $\sqrt{\pi}$. Vérifier que :

$$\forall x > 0, \quad g'(x) = -2\sqrt{\pi}e^{ix^2}.$$

- 11) a) Déterminer le module et un argument de i .
b) Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2-i}$. On admet ensuite que :

$$\frac{1}{X^2-i} = \frac{1-i}{4} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X-\sqrt{2}}{X^2-X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2-X\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2X+\sqrt{2}}{X^2+X\sqrt{2}+1} + \frac{i}{X^2+X\sqrt{2}+1} \right).$$

- c) Démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2-\sqrt{2}t+1} dt = \pi\sqrt{2}$, Donner la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+\sqrt{2}t+1} dt$ puis déterminer la valeur de $g(0)$.

- 12) En déduire que :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = \frac{(1+i)\pi}{\sqrt{2}} - 2\sqrt{\pi} \times H(x)$$

où la fonction H a été introduite dans la partie I.

Donner ensuite les valeurs de $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$, de $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et de $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Partie III - Etude d'une série de fonctions

Dans cette partie, on étudie la fonction S d'expression :

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction d'expression $f_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$.

13) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

a) Montrer l'identité suivante :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N a_n (b_n - b_{n-1}) = \sum_{n=1}^N (a_n - a_{n+1}) b_n + a_{N+1} b_N - a_1 b_0.$$

b) On suppose désormais que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle, et que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que $\sum (a_n - a_{n+1})$ est une série positive et convergente.

En déduire que la série $\sum a_n (b_n - b_{n-1})$ converge.

14) Soient $x \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n e^{ikx} = e^{\frac{i(n+1)x}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

15) À l'aide des deux questions précédentes, démontrer que S est définie sur $]0, 2\pi[$.

16) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$ converge, mais ne converge pas absolument.

17) Montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{i(k+1)x} - e^{ikx}}{ix\sqrt{k}} - \int_k^{k+1} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq \frac{1}{4k^{\frac{3}{2}}}$$

Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$\left| \frac{e^{ix} - 1}{ix} S(x) - \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt \right| \leq C$$

18) Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+ , de :

$$I(x) = \sqrt{x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$$

19) Déterminer la limite en 0^+ de la fonction $x \mapsto \frac{e^{ix} - 1}{ix}$. Donner alors un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers 0^+ .

Exercice 2 (Groupes)

1 Groupes d'exposant fini

Soit G un groupe de neutre e . On dit que G est d'exposant fini si et seulement si :

$$\exists m \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in G \quad x^m = e$$

1) Soit G un groupe fini. Montrer que G est d'exposant fini.

2) Donner un exemple de groupe infini qui soit d'exposant fini.

2 Croissance d'un groupe

Soit G un groupe de neutre e , engendré par une partie finie $\mathcal{S}$. À tout élément $g \in G \setminus \{e\}$ on associe sa *longueur relativement à $\mathcal{S}$* par

$$\ell_{\mathcal{S}}(g) = \min \left\{ \sum_{i=1}^k |a_i| \mid g = s_1^{a_1} \dots s_k^{a_k}; s_i \in \mathcal{S}, a_i \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

Ainsi, $\ell_{\mathcal{S}}(g)$ est le nombre minimal d'éléments de $\mathcal{S}$ permettant d'obtenir g .

Par convention, on pose $\ell_{\mathcal{S}}(e) = 0$.

On note alors, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p) = \{g \in G \mid \ell_{\mathcal{S}}(g) \leq p\}$$

$\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p)$ est l'ensemble des éléments de G s'obtenant à partir d'au maximum p éléments de $\mathcal{S}$.

Nous dirons que G est un groupe à croissance polynomiale de degré $d \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe deux réels strictement positifs α et β tels que, pour tout $p \geq 1$,

$$\alpha p^d \leq |\mathcal{V}_{\mathcal{S}}(p)| \leq \beta p^d$$

- 1) Montrer que, pour tout $g, h \in G$, $\ell_{\mathcal{S}}(g^{-1}) = \ell_{\mathcal{S}}(g)$ et $\ell_{\mathcal{S}}(gh) \leq \ell_{\mathcal{S}}(g) + \ell_{\mathcal{S}}(h)$.
- 2) Soit Σ une autre partie finie génératrice de G . Montrer qu'il existe deux constantes C et C' strictement positives telle que, pour tout $g \in G$:

$$C\ell_{\mathcal{S}}(g) \leq \ell_{\Sigma}(g) \leq C'\ell_{\mathcal{S}}(g)$$

En déduire que le fait que G soit un groupe à croissance polynomiale de degré d ne dépend pas du système $\mathcal{S}$ de générateurs choisis.

Exercice 3 (d'après Centrale)

On s'intéresse dans ce problème à une inégalité établie par Torsten Carleman : si $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge, alors la série de terme général $\left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)^{1/n} \leq e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Le problème commence en démontrant un analogue intégral de cette inégalité : l'inégalité de Knopp.

I.A - Deux inégalités intégrales

I.A.1) Inégalité intégrale de Jensen

Q 1. Soit $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs dans un intervalle J . Soit φ une fonction continue et convexe sur J . Démontrer que

$$\varphi \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi \circ f(t) dt$$

On pourra utiliser des sommes de Riemann.

I.A.2) Une autre inégalité intégrale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue strictement positive et intégrable.

Pour tout $x > 0$, on pose

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{1}{x} g(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt$$

Q 2. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers 0.

Q 3. Déterminer la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On pourra utiliser une intégration par parties.

Q 4. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} h(x)dx$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

I.B - Démonstration de l'inégalité de Knopp

Soit f une fonction continue strictement positive, intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Q 5. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) \leq \frac{e}{x^2} \int_0^x tf(t)dt$$

On pourra remarquer que $\ln(f(t)) = \ln(tf(t)) - \ln(t)$.

Q 6. En déduire que $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) dx \leq e \int_0^{+\infty} f(x)dx$$

I.C - Application à l'inégalité de Carleman

On admet que les résultats précédents restent vrais dans le cas d'une fonction f continue par morceaux, en imposant que $\varphi \circ f$ (Q.1) et $\ln \circ f$ (Q.5 et suivantes) soient continues par morceaux¹.

On suppose dans cette sous-partie que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels strictement positifs. On note f la fonction en escalier qui, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, est égale à a_k sur l'intervalle $[k-1, k[$.

Q 7. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction v_k définie sur $[k-1, k]$ par

$$\begin{cases} v_k(x) = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{k-1} \ln(a_i) + \frac{1}{x}(x-k+1) \ln(a_k) & \text{si } k \geq 2 \\ v_1(x) = \ln(a_1) \end{cases}$$

est minimale pour $x = k$.

Q 8. Démontrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,

$$\int_{k-1}^k \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln(f(t))dt\right) dx \geq \exp\left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln(a_i)\right)$$

On pourra utiliser la question précédente.

Q 9. En déduire l'inégalité de Carleman dans le cas où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

Q 10. Expliquer comment on peut retirer l'hypothèse de décroissance.

1. Vous pouvez essayer d'adapter les preuves au cas continue par morceaux s'il vous reste du temps en fin de DS

Exercice 4 (Autour de Cesàro)

Soit E une partie de $\mathbb{C}$.

À toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans E , ce que l'on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de Cesàro définie par

$$\forall n \geq 0, \quad \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k,$$

et la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des écarts définie par

$$\forall n \geq 0, \quad e_n = u_{n+1} - u_n.$$

À toute série $\sum_{n \geq 0} a_n$ avec $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on associe la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles définie par

$$\forall n \geq 0, \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k.$$

Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente, on note S sa somme définie par

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} S_N,$$

et $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des restes définie par

$$\forall n \geq 0, \quad R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on note

$$\mathcal{C}^0(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ continue sur } I\},$$

$$\mathcal{C}_b^0(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ continue et bornée sur } I\}.$$

1 Lemme de Cesàro

1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \right)$$

2) Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, démontrer que le résultat subsiste si $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

Ce résultat (questions 1 et 2) sera appelé « théorème de Cesàro ».

Applications

3) a) En utilisant le théorème de Cesàro, calculer la limite de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{nk}$.

b) À l'aide d'une comparaison série-intégrale, donner un équivalent de (v_n) .

4) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \alpha$.

En utilisant le théorème de Cesàro, donner un équivalent de (u_n) . Retrouver ce résultat par un théorème de comparaison de séries à termes positifs.

5) a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in]0, +\infty[^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in]0, +\infty[$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$$

- b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$.
- c) Démontrer que le résultat de la question 5a subsiste si $\ell = 0$ ou $\ell = +\infty$.
- d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n!}$.
- 6) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes, de limites respectives $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = ab$$

On pourra commencer par étudier le cas $a = b = 0$.

Réciproques partielles

- 7) Vérifier que la réciproque du théorème de Cesàro n'est pas toujours vraie en exhibant une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui ne converge pas et telle que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
- 8) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \quad \text{et} \quad (u_n) \text{ monotone} \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right)$$

Démontrer que le résultat subsiste pour $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.

- 9) Théorème de Hardy faible. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

a) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=0}^n k e_k = n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k$$

b) En déduire que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \quad \text{et} \quad e_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right)$$

- 10) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell \quad \text{et} \quad e_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \right). \quad (\text{Hardy fort})$$

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \ell$ et $e_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

a) Soit $0 \leq n < m$. Démontrer que

$$\sum_{k=n+1}^m u_k - (m-n)u_n = \sum_{j=n}^{m-1} (m-j)e_j.$$

b) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $2 \leq n < m$ on a

$$\left| \frac{(m+1)\sigma_m - (n+1)\sigma_n}{m-n} - u_n \right| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right)$$

et

$$|u_n - \ell| \leq C \ln \left(\frac{m-1}{n-1} \right) + \frac{m+1}{m-n} (|\sigma_m - \ell| + |\sigma_n - \ell|).$$

- c) En déduire (Hardy fort). *Indication : on pourra prendre $m = 1 + \lfloor \alpha n \rfloor$ avec un paramètre $\alpha > 1$ à choisir, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.*

2 Variantes continues du lemme de Cesàro et du théorème d'Abel

Le but de cette partie est d'étudier des versions continues du lemme de Cesàro, du théorème d'Abel et de leurs réciproques partielles.

1) Soient $f \in \mathcal{C}^0(]0, +\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \right) \implies \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \ell \right).$$

2) À l'aide d'un contre-exemple, démontrer que la réciproque du résultat de la question 1 est fausse.

3) Soient $f \in \mathcal{C}^0(]0, +\infty[)$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Démontrer que

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell \right) \implies \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \right).$$

4) Soit $f \in \mathcal{C}_b^0(]0, +\infty[)$. On définit la transformée de Laplace de f par la fonction

$$\mathcal{L}(f) : t \in]0, +\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} e^{-tx} f(x) dx.$$

Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ est bien définie sur $]0, +\infty[$. On admet que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \mathcal{L}(f)'(t) = \int_0^{+\infty} -xe^{-tx} f(x) dx$$

5) Soit $f \in \mathcal{C}_b^0(]0, +\infty[)$. Le but de cette question est de démontrer que

$$\left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} \right) \implies \left(\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x) dx \right).$$

On suppose que $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

a) Démontrer que la fonction

$$F : x \in [0, +\infty[\mapsto \int_x^{+\infty} f(t) dt$$

est bien définie, continue et bornée sur $[0, +\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et vérifie $F' = -f$.

b) Démontrer que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{L}(f)(t) = \int_0^{+\infty} f(x) dx$ par une intégration par parties.

6) Démontrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

FIN DE L'ÉPREUVE