

Épreuve de Mathématiques 1

Correction

Exercice 1 (Algèbre linéaire)

1) Une première étude.

- a) *Un conseil de rédaction : utiliser des $\iff$ pour rédiger une résolution de système linéaire, et uniquement une résolution de système linéaire.*

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions cherchées.

$$\begin{array}{lcl}
 X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{S} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 & \iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & & \iff X \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3y - 6z = 0 \end{cases} & & \\
 & \iff \begin{cases} x = 2 \times 2z - 3z = z \\ y = 2z \end{cases} & &
 \end{array}$$

Conclusion :

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- b) L'application f est l'application linéaire canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

Donc il vient

$$\text{Ker } f = \mathcal{S} = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme $\text{Ker } f \neq \{0\}$,

L'application f n'est pas injective

D'après le théorème du rang, avec $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'espace de départ,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Or $\operatorname{Im} f \subset \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, donc $\dim \operatorname{Im} f \leq 2$, alors que $\dim E = 3$: forcément $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$ et f n'est pas injective.

En phrase : il n'y a pas la place d'injecter, de façon linéaire, un espace de dimension 3 dans un espace de dimension 2.

2) Seconde étude.

a)

$$\begin{array}{l} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \iff AX = 0 \\ \iff x + y + z = 0 \\ \iff x = -y - z \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \iff X = \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff X \in \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{array} \right.$$

Conclusion :

$$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Comme $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$,

L'application f n'est pas injective

b) D'après le théorème du rang, avec $E = \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Or $\dim E = 3$ et $\dim \operatorname{Ker} f = 2$, d'où

$$\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 1$$

De plus, $\operatorname{Im} f$ est engendré par les vecteurs colonnes, c'est-à-dire $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ici, le calcul est immédiat. Mais, en toute généralité, lorsqu'on a $r = \dim \operatorname{Im} f$, il suffit d'extraire une famille de r vecteurs libres des vecteurs colonnes de A pour trouver une base de l'image.

Exercice 2 (Analyse)

1) Préliminaires.

$$\text{a) } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}).$$

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est la partie réelle de $x \mapsto e^{ix}$. De plus (vérifications) : c'est une fonction paire (donc des puissances paires) et $\cos(0) = 1$.

$$\text{b) } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Via la série géométrique, puis $x \mapsto \ln(1+x)$ est la primitive de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ qui s'annule en 0.
Ainsi (vérifications) : $\ln(1+0) = 0$, le terme constant est nul.

c) La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Application. *On étudie toujours le terme général.*

a) Soit $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ pour $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ &= \frac{1}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \\ &\sim \frac{1}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

Or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann, $\alpha = 3/2 > 1$), donc, par théorème de comparaison des séries positives ($u_n \geq 0$),

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge}}$$

b) Soit $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$ pour $n \geq 1$.

Un DL, presque toujours, commence de l'intérieur (la variable) vers l'extérieur, en composant.

$$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \ln(1+u) = u + o(u) \text{ avec } u = -\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ &\sim -\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Ainsi, $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$.

Or $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), donc, par théorème de comparaison des séries positives,

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge absolument donc converge}}$$

Exercice 3 (Algèbre linéaire)

1) Montrons que f est linéaire : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $M, N \in E$.

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= -(\lambda M + N) + \text{Tr}(\lambda M + N)I_n \\ &= -\lambda M - N + \lambda \text{Tr}(M)I_n + \text{Tr}(N)I_n && \text{Par linéarité de la trace} \\ &= \lambda f(M) + f(N) \end{aligned}$$

Conclusion :

L'application f est linéaire

Montrons que $f : E \rightarrow E$: Soit $M \in E$, $f(M) \in E$ comme combinaison linéaire de matrices. Donc $f : E \rightarrow E$.

Conclusion :

$$f \in \mathcal{L}(E)$$

2) Soit $M \in E$.

$$\begin{aligned}
 M \in \text{Ker } f &\implies f(M) = 0 \\
 &\implies -M + \text{Tr}(M)I_n = 0 \\
 &\implies \text{Tr}(-M + \underbrace{\text{Tr}(M)I_n}_{=\lambda \in \mathbb{R}}) = -\text{Tr}(M) + \text{Tr}(M)\text{Tr}(I_n) = 0 \\
 &\implies (n-1)\text{Tr}(M) = 0 \\
 &\implies \text{Tr}(M) = 0
 \end{aligned}$$

Carn ≥ 2

Une hypothèse qui ne sert pas, c'est louche : « $n \geq 2$ » doit être là pour une raison...

Conclusion

$$M \in \text{Ker } f \implies \text{Tr}(M) = 0$$

Reprenons :

$$\begin{aligned}
 M \in \text{Ker } f &\implies f(M) = -M + \text{Tr}(M)I_n = 0 \\
 &\implies -M = 0 && \text{Car } \text{Tr}(M) = 0 \text{ d'après ci-dessus} \\
 &\implies M = 0
 \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker } f \subset \{0\}$. Or $\{0\} \subset \text{Ker } f$ (sous-espace vectoriel), donc

$$\text{Ker } f = \{0\}$$

3) D'après 2, f est injective. Or f est un endomorphisme en dimension finie, donc

L'application f est bijective

Exercice 4 (Analyse)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1) Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est polynomiale donc dérivable¹ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f'_n(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$$

- $f_n(0) = 1$
 - $f_n(1) = 2 - n$
 - $f_n(x) \sim_{+\infty} x^n$ car $n > 1$.
- Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$.

x	0	1	$+\infty$
$f'_n(x)$	—	0	+
f_n	1	$2 - n$	$+\infty$

1. C'est toujours plus poli de le dire avant de dériver, surtout si la justification est immédiate.

- 2) La fonction f_n est *continue, strictement monotone*, sur l'intervalle $[0, 1]$, et $f_n(0) > 0$, $f_n(1) \leq 0$ (car $n \geq 2$).

Donc, d'après le théorème de la bijection,

L'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $[0, 1]$

- 3) Dans les études de suites implicites $f_n(x_n) = 0$, tout placer dans le tableau de variation aide souvent à comprendre.

x	0	x_n	ε	1
f_n	1	0	$f_n(\varepsilon) < 0$	$2 - n$

Si $f_n(\varepsilon) < 0$, la stricte décroissance de f_n impose $0 < x_n < \varepsilon$.

- a) Comme $\varepsilon \in]0, 1[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n\varepsilon = -\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\varepsilon) = -\infty$$

Par définition de la limite,

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \implies f_n(\varepsilon) \leq A$$

Avec $A = 0$, il vient

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $f_n(\varepsilon) < 0$

- b) Soit $n \geq n_0$. D'après le tableau de variation de la question 1, f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$, donc $f_n(\varepsilon) < 0$ entraîne $x_n < \varepsilon$.
- c) Par construction, $x_n \in [0, 1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour $\varepsilon \geq 1$, $0 \leq x_n \leq \varepsilon$.
Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, on vient de montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq x_n \leq \varepsilon$ (question 3b).

Ainsi,

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \left[n \geq n_0 \implies x_n = |x_n| \leq \varepsilon \right]$$

Par conséquent,

La suite (x_n) converge vers 0

FIN DE L'ÉPREUVE