

Épreuve de Mathématiques 1

Durée 2 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites
--

Exercice 1 (Algèbre linéaire)

1) Une première étude.

a) Résoudre, dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire suivant :
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

b) Soit $f : \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 2x - y \end{pmatrix}$.

Déterminer $\text{Ker } f$, le noyau de f . L'application f est-elle injective ?

2) Seconde étude. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Notons f la fonction de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée à A : $f(X) = AX$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- a) Déterminer $\text{Ker } f$. L'application f est-elle injective ?
- b) En déduire $\dim(\text{Im } f)$, puis $\text{Im } f$.

Exercice 2 (Analyse)

1) Préliminaires.

- a) Rappeler le développement limité de $\cos(x)$ en 0 à l'ordre $2n$, où $n \in \mathbb{N}$. On précisera les 2 premiers termes non nuls.
- b) Rappeler le développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre n , où $n \in \mathbb{N}$. On précisera aussi les 2 premiers termes non nuls.

c) Rappeler la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Application. Nature des séries numériques suivantes :

a) $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n\sqrt{n}} \right)$

b) $\sum \ln \left(\cos \left(\frac{1}{n^2} \right) \right)$

Exercice 3 (Algèbre linéaire)

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $n \geq 2$ est un entier. Définissons f sur E par $f(M) = -M + \text{Tr}(M)I_n$.

On rappelle que $\text{Tr}(M)$, la trace de la matrice M , est la somme des coefficients diagonaux. Et que I_n désigne la matrice identité d'ordre n .

- 1) Montrer que f est linéaire, en déduire que f est un endomorphisme de E .
- 2) Si $M \in \text{Ker } f$, déterminer $\text{Tr}(M)$. En déduire $\text{Ker } f$.
- 3) Montrer que f est bijective.

Exercice 4 (Analyse)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

- 1) Tracer le tableau de variations complet (avec les limites aux bords du domaine de définition) de f_n sur $\mathbb{R}_+$, pour $n \geq 2$.
- 2) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution sur $[0, 1]$ pour $n \geq 2$.
On notera cette solution x_n .
- 3) On cherche désormais la limite de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$. On rappelle qu'une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, \left[n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon \right]$$

- a) On fixe $\varepsilon \in]0, 1[$ quelconque. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $f_n(\varepsilon) < 0$.
- b) On fixe le n_0 dont on a prouvé l'existence à la question précédente. Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, $x_n \leq \varepsilon$.
- c) En déduire la convergence et la limite de (x_n) .

FIN DE L'ÉPREUVE