

Programme de colle 6

Classe de MPI

Semaine du lundi 12 au vendredi 16 octobre

Liste des questions de cours

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none">• La série des $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^2}$ pour $n \geq 1$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$, converge normalement sur tout segment $[0, A]$ avec $A > 0$.• $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$• Démonstration du théorème : la convergence normale entraîne la convergence uniforme. |
|---|

1 Suites et séries de fonctions

Les fonctions sont définies sur $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les définitions et théorèmes se réécrivent à l'identique pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1.1 Suites de fonctions

1.1.1 Convergences

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. Norme infinie. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Convergence uniforme sur tout segment.

1.1.2 Théorèmes avec convergence uniforme

Théorème de continuité, théorème de la double limite. Théorème d'intégration d'une limite uniforme, corolaire sur les suites d'intégrales. Théorème de dérivation, cas des fonctions $\mathcal{C}^k$.

Approximations uniformes : $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R})$ par des fonctions en escalier, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ par des fonctions polynomiales (Weierstrass).

1.1.3 Théorème sans convergence uniforme

Théorème de convergence dominée.

1.2 Séries de fonctions

1.2.1 Convergences

Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale d'une série de fonctions. Liens.

Convergence absolue simple, convergence normale sur tout segment.

1.2.2 Théorèmes avec convergence uniforme

De même : continuité double limite, intégration terme à terme, dérivation terme à terme, cas $\mathcal{C}^k$.

1.2.3 Théorème sans convergence uniforme

Intégration terme à terme : version avec des fonctions positive, ou avec une famille sommable.