

Programme de colle 5

Classe de MPI

Semaine du lundi 5 au vendredi 9 octobre

Liste des questions de cours
• La suite des $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n(1 - x)$ converge uniformément sur $[0, 1]$. • La suite des $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \text{Arctan}(nx)$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$. • Démontrer que si la suite $(f_n) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$. • Pour $a < b$ deux nombres réels, et $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$, montrer que $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0$.

1 Suites et séries de fonctions

Les fonctions sont définies sur $I \subset \mathbb{R}$ intervalle, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Les définitions et théorèmes se réécrivent à l'identique pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1.1 Suites de fonctions

1.1.1 Convergences

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions. Norme infinie. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Convergence uniforme sur tout segment de I .

1.1.2 Théorèmes avec convergence uniforme

Théorème de continuité, théorème de primitivation, corrolaire sur les suites d'intégrales. Théorème de dérivation, cas des fonctions $\mathcal{C}^k$.

Approximations uniformes : $f \in \mathcal{C}_m^0(I, \mathbb{R})$ par des fonctions en escalier, $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ par des fonctions polynomiales (Weierstrass).

1.1.3 Théorème sans convergence uniforme

Théorème de convergence dominée.