

Programme de colle 4

Classe de MPI

Semaine du lundi 28 septembre au vendredi 2 octobre

Liste des questions de cours
• Tout groupe fini de cardinal premier est cyclique, puis commutatif. • Déterminer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ (avec preuve). • Soit A un anneau commutatif. $\text{Nilrad}(A) = \{x \in A \mid \exists n \in \mathbb{N}, x^n = 0\}$ est un idéal.

1 Groupes

Rappel de MP2I : Groupes, sous-groupes, morphismes de groupe : Noyau et injectivité, image et surjectivité. Sous-groupe engendré par une partie, par un élément, partie génératrice.

1.1 Éléments d'un groupe

Ordre d d'un élément x d'un groupe G , théorèmes : $d \mid \text{Card}(G)$ (cas G fini), et, pour $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = 1 \iff d \mid n$.

1.2 Groupes monogènes

Description dans le cas infini, et infini (groupe cyclique). Sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Construction de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, racines primitives n -ième de l'unité.

2 Anneaux

Anneaux, sous-anneaux, morphismes d'anneaux. Noyau, image. Formule du binôme. $(A^\times, \times)$ groupe des inversibles de A . Anneau commutatif, anneau intègre.

3 Corps

Corps, sous-corps, morphismes.

4 $\mathbb{K}$ -Algèbre

Soit $\mathbb{K}$ un corps. $\mathbb{K}$ -algèbres, sous-algèbres, morphismes d'algèbres.

5 Anneaux commutatifs

Idéal, stabilité par image réciproque, image directe, intersection et somme.

Idéal principal xA , le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.

Divisibilité en terme d'ideaux. Cas de $\mathbb{Z}$: tout idéal est principal, pgcd, Bezout. Cas de $\mathbb{K}[X]$: tout idéal est principal, pgcd, Bezout. Polynômes irréductibles. Cas de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$: décomposition en produit d'irréductibles unitaires.