

Programme de colle 3

Classe de MPI

Semaine du lundi 21 au vendredi 25 septembre

Liste des questions de cours
• Variations et équivalent de la suite $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n t \, dt$ (sans suites de fonctions). • Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\operatorname{sh} t} \, dt$. • Nature de la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ en fonction de $\beta \in \mathbb{R}$. • Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt$.

L'étude classique de la convergence (exercices 18 ou 20, par exemple les deux derniers cas de l'exercice 18) doit être bien maîtrisée, tant la démarche que la rédaction.

1 Intégration

1.1 Fonctions continues par morceaux

Définition de MP2I, définition sur I intervalle quelconque.

1.2 Intégration sur un segment

Chasles, linéarité, croissance, inégalité triangulaire, théorème de l'intégrale nulle.
Primitives, IPP et changement de variable, fonctions usuelles (reconnaître $u'u^\alpha$).

1.3 Intégrales généralisées : sur un intervalle quelconque

1.3.1 Intégrale convergente

Définition d'une intégrale convergente, d'une intégrale divergente.
Cas d'une fonction prolongeable par continuité, cas de la divergence grossière.
Propriétés, théorèmes de changement de variable, d'intégration par parties.
Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $\int_I |f|$ converge, alors $\int_I |f| = 0 \implies f = 0$.

1.3.2 Le cas des fonctions positives

1.3.3 Fonctions usuelles

Au voisinage de $+\infty$ (Riemann et exponentielles), au voisinage de 0 (Riemann, $\ln(x)$).
Ces fonctions doivent être parfaitement connues.

1.3.4 Relations de comparaison

Théorème de majoration, théorème de comparaison pour les grand O , petit o et équivalents.
Comparaison séries / intégrales.

1.3.5 Intégrabilité et fonctions intégrables

Définition d'une intégrale absolument convergente et des *fonctions intégrables*. L'absolue convergence entraîne la convergence.

Espaces vectoriels des fonctions continues par morceaux intégrables sur I , de carré intégrable sur I .

1.3.6 Intégration des relations de comparaison

Cas convergent, cas divergent.