EXERCICE 1

Déterminer, en utilisant les règles de dérivation, les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) On dérive la fonction définie par $f(x) = 3x + 2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times 1 + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2) On dérive la fonction définie par $f(x) = x^5 + 7x^3 + 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^{5-1} + 7 \times 3x^{3-1} + 0 \\ &= 5x^4 + 21x^2 \end{aligned}$$

3) On dérive la fonction définie par $f(x) = x^4\sqrt{x}$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^{4-1}\sqrt{x} + x^4\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 4x^3\sqrt{x} + x^3(\sqrt{x})^2\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{car } x > 0 \text{ donc } x = (\sqrt{x})^2 \\ &= 4{,}5x^3\sqrt{x} \end{aligned}$$

4) On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3 + 3x + 1}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 2) \times (x^3 + 3x + 1) - (x^2 + 2x + 2) \times (3x^2 + 3)}{(x^3 + 3x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 + 6x^2 + 2x + 2x^3 + 6x + 2 - (3x^4 + 3x^2 + 6x^3 + 6x + 6x^2 + 6)}{(x^3 + 3x + 1)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x - 4}{(x^3 + 3x + 1)^2} \end{aligned}$$

5) On dérive la fonction définie par $f(x) = 2x + 3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 1 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

6) On dérive la fonction définie par $f(x) = x^6 + 5x^3 + 7$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^{6-1} + 5 \times 3x^{3-1} + 0 \\ &= 6x^5 + 15x^2 \end{aligned}$$

7) On dérive la fonction définie par $f(x) = x^3\cos(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^{3-1}\cos(x) + x^3\sin(x) \\ &= 3x^2\cos(x) + x^3\sin(x) \end{aligned}$$

8) On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 1}{x^3 - 2x + 1}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 5) \times (x^3 - 2x + 1) - (x^2 + 5x + 1) \times (3x^2 - 2)}{(x^3 - 2x + 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 - 4x^2 + 2x + 5x^3 - 10x + 5 - (3x^4 - 2x^2 + 15x^3 - 10x + 3x^2 - 2)}{(x^3 - 2x + 1)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 2x + 7}{(x^3 - 2x + 1)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $[-2;1]$ par $f(x) = 3x^3 + 6x^2 - 1$

1) **a.** Calcul de la dérivée : $f'(x) = 3 \times 3x^{3-1} + 6 \times 2x - 0 = 9x^2 + 12x$.

De plus, $9x(x + \frac{4}{3}) = 9x \times x + 9x \times \frac{4}{3} = 9x^2 + 12x = f'(x)$.

b. Résolution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:

Puisque $f'(x) = 9x(x + \frac{4}{3})$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :

$x + \frac{4}{3} \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{4}{3}$;

De plus, $9x \geqslant 0$ lorsque $x \geqslant 0$.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	-2		$-\frac{4}{3}$		0		1
$9x$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x + \frac{4}{3}$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les solutions de l'inéquation sont les $x \in [-2; -\frac{4}{3}] \cup [0;1]$

c. Tableau de variation de la fonction f.

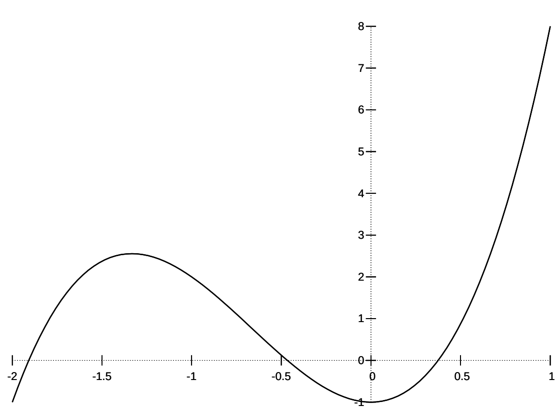
x	-2		$-\frac{4}{3}$		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$3,5$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	8

$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{95}{27} \simeq 3{,}5$.

2) Tableau de valeurs (résultats arrondis à 0,1 près) :

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$	2,4	2	0,1	-1	0,9	8

3) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;



4) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = -1,92$; $x = -0,46$ et $x = 0,38$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $[-3;4]$ par $f(x) = -x^3 + 12x - 4$.

1) **a.** Calcul de la dérivée : $f'(x) = -3x^{3-1} + 12 \times 1 - 0 = -3x^2 + 12$.
De plus, $3(-x+2)(x+2) = 3(-x^2 - 2x + 2x + 4) = -3x^2 + 12 = f'(x)$.

b. Résolution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:
Puisque $f'(x) = 3(-x+2)(x+2)$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :
$-x + 2 \geqslant 0 \iff 2 \geqslant x \iff x \leqslant 2$
$x + 2 \geqslant 0 \iff x \geqslant -2$.
On a donc le tableau de signe suivant :

x	-3		-2		2		4
$-x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$-$	|	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc les solutions de l'inéquation sont les $x \in [-2;2]$

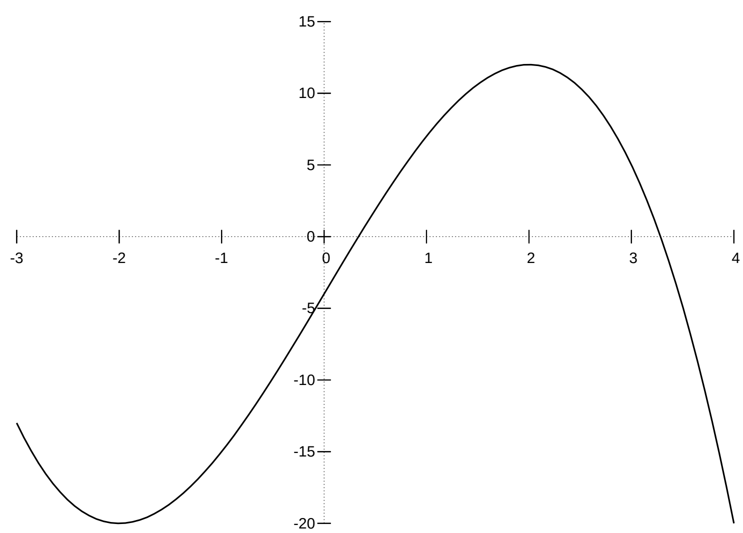
c. Tableau de variation de la fonction f.

x	-3		-2		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	-13	$\searrow$	-20	$\nearrow$	12	$\searrow$	-20

2) Tableau de valeurs (résultats arrondis à 0,1 près) :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-20	-15	-4	7	12	5

3) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;



4) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = 0,34$ et $x = 3,28$.