Suites numériques

29 mars 2007

I Généralités

II Suites arithmétiques

A Définition

Dans une suite arithmétique, chaque terme s'obtient en ajoutant un nombre r constant au terme précédent :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} u_0 & & \text{fixé,} \\ u_{n+1} & = & u_n + r \end{array}}$$

<u>Vocabulaire</u> : le nombre r est appelé la *raison*.

Exemple 1. La suite de l'exercice 1 est définie par :

$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1460 \\ u_{n+1} & = & u_n + 20 \end{array}$ C'est une suite arithmétique de raison 20.

B Expression du terme général en fonction de n

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n positif,

$$\boxed{u_n = u_0 + r \times n}$$

Exemple 2. Le terme général de la suite de l'exercice 1 s'exprime ainsi : $u_n = 1460 + 20 \times n$

faire l'exercice 4

C Variations

Une suite arithmétique (u_n) de raison r est
- croissante si $r \geq 0$
- décroissante si $r \leq 0$
- constante si $r = 0$

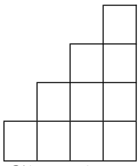
Exemple 3. **1)** La suite de l'exercice 1 est croissante.

2) La suite de l'exercice 4 est décroissante.

D Somme des termes d'une suite arithmétique

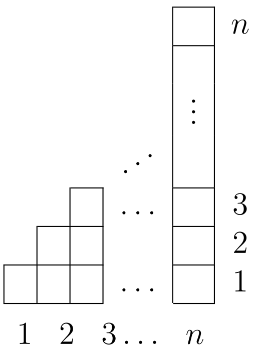
D.1 La somme des n premiers entiers naturels :

On cherche à calculer $1+2+3+4+\cdots+n$. On essaye donc d'obtenir une formule (qui dépendra de n) permettant de calculer directement la valeur de cette somme. Pour cela, on considère des petits carrés □ de taille 1×1. Chercher à calculer la somme $1+2+3+4$, c'est la même chose que chercher à calculer l'aire de l'objet suivant :



C'est le triangle inférieur d'un carré de coté 4, plus 4 demi-cases (ce qui dépasse de la diagonale). Or l'aire du carré est 4×4, donc $1+2+3+4=\dfrac{4\times 4}{2}+\dfrac{4}{2}$.

On procède de même pour $1+2+3+4+\cdots+n$:



Donc $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n\times n}{2}+\dfrac{n}{2}$.

On factorise et on obtient finalement le résultat suivant :

$$1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

D.2 Cas général :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=\frac{(2u_0+nr)(n+1)}{2}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n &= u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+(u_0+3r)+\cdots+(u_0+nr)\\
&= u_0(n+1)+1r+2r+3r+\cdots+nr\\
&= \frac{(2u_0+nr)(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

□

III Suites géométriques

A Définition

Dans une suite géométrique, chaque terme s'obtient en multipliant par un nombre q constant le terme précédent :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} u_0 & & \text{fixé,} \\ u_{n+1} & = & q \times u_n \end{array}}$$

<u>Vocabulaire</u> : le nombre q est appelé la *raison*.

Exemple 4. La suite de l'exercice 2 est définie par :
$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 2 \times u_n \end{array}$ C'est une suite géométrique de raison 2.

Exemple 5. La suite de l'exercice 3 est définie par :
$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 100 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{9}{10} \times u_n \end{array}$ C'est une suite géométrique de raison $\dfrac{9}{10}$.

B Expression du terme général en fonction de n

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout entier n positif,

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Exemple 6. Le terme général de la suite de l'exercice 2 s'exprime ainsi : $u_n = 2^n$

Exemple 7. Le terme général de la suite de l'exercice 3 s'exprime ainsi : $u_n = 100 \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$

faire l'exercice 6

C Variations

Une suite géométrique (u_n) de raison q est
– croissante si $q \geq 1$
– décroissante si $q \leq 1$
– constante si $q = 1$

Exemple 8. **1)** La suite de l'exercice 2 est croissante.
2) La suite de l'exercice 4 est décroissante.

D Somme des termes d'une suite géométrique

Dans toute cette partie, on suppose que la suite n'est pas constante, c'est-à-dire $q \neq 1$.

D.1 Calcul de $1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n$

On cherche à calculer la somme $S_n = 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n$. L'idée, c'est de multiplier S_n par q :

$$\begin{aligned} q \times S_n &= q\left(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n\right) \\ &= q+(q\times q)+(q\times q^2)+(q\times q^3)+\cdots+(q\times q^n) \\ &= q+q^2+q^3+q^4+\cdots+q^{n+1} \end{aligned}$$

Écrivons S_n et qS_n l'un au-dessus de l'autre, en alignant les puissances :

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} S_n & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & q^3 & + & & \dots & + & q^{n-1} & + & q^n & \\ qS_n & = & & & q & + & q^2 & + & q^3 & + & q^4 & + & \dots & & + & q^n & + & q^{n+1} \end{array}$$

Donc, si on fait la différence des deux lignes, on obtient : $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$.
De plus $S_n - qS_n = (1-q)S_n$, donc $(1-q)S_n = 1-q^{n+1}$. D'où le résultat :

$$\boxed{S_n = \frac{1-q^n}{1-q}}$$

D.2 Cas général :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

On cherche à calculer la somme $S_n = u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$.

$$\begin{aligned} S_n = u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n &= u_0+(u_0q)+(u_0q^2)+(u_0q^3)+\cdots+(u_0q^n) \\ &= u_0\left(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n\right) \\ &= u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}}$$