Contrôle de Mathématique (**B**)

Correction.

EXERCICE 1

1) On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

2) On dérive la fonction définie par $f(x) = 10x + 6$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 10 \times 1 + 0 \\ &= 10 \end{aligned}$$

3) On dérive la fonction définie par $f(x) = 6x^7 - 12x^5 + x^2 + 3\sqrt{2}x + \dfrac{1}{5}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6 \times 7x^{7-1} - 12 \times 5x^{5-1} + 2x^{2-1} + 3\sqrt{2} \times 1 + 0 \\ &= 42x^6 - 60x^4 + 2x + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

4) On dérive la fonction définie par $f(x) = (2x^3 + 6)\sin(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x^2 + 0) \times \sin(x) + (2x^3 + 6) \times (\cos(x)) \\ &= 6x^2 \sin(x) + (2x^3 + 6)\cos(x) \end{aligned}$$

5) Remarquons pour commencer que $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 2}{2x^3 + 2} = \dfrac{2(x^2 + x - 1)}{2(x^3 + 1)} = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$ On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 1) \times (x^3 + 1) - (x^2 + x - 1) \times (3x^2)}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{2x^4 + 2x + x^3 + 1 - (3x^4 + 3x^3 + 3x^2)}{(x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{-x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1}{(x^3 + 1)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = -8x^3 + 6x^2 + 72x + 38$

1) **a.** Calcul de la dérivée : $f'(x) = -8 \times 3x^{3-1} + 6 \times 2x^{2-1} + 72 = -24x^2 + 12x + 72$.
De plus, $(4x + 6)(-6x + 12) = -24x^2 + 48x - 36x + 72- = -24x^2 + 12x + 72 = f'(x)$.

b. Résolution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:
Puisque $f'(x) = (4x + 6)(-6x + 12)$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :

- $4x + 6 = 0$ si et seulement si $4x = -6$, c'est-à-dire si $x = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.
  De plus $4 > 0$, ce qui justifie la deuxième ligne du tableau de signes.
- $-6x + 12 = 0$ si et seulement si $-6x = -12$, c'est-à-dire si $x = \dfrac{-12}{-6} = 2$.
  De plus $-6 < 0$, ce qui justifie la troisième ligne du tableau de signes.

On complète le tableau par la règle des signes. On a donc le tableau de signe suivant :

x	-3		$-\frac{3}{2}$		2		4
$4x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$-6x+12$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc les solutions de l'inéquation sont les $x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right]$

c. Tableau de variation de la fonction f.

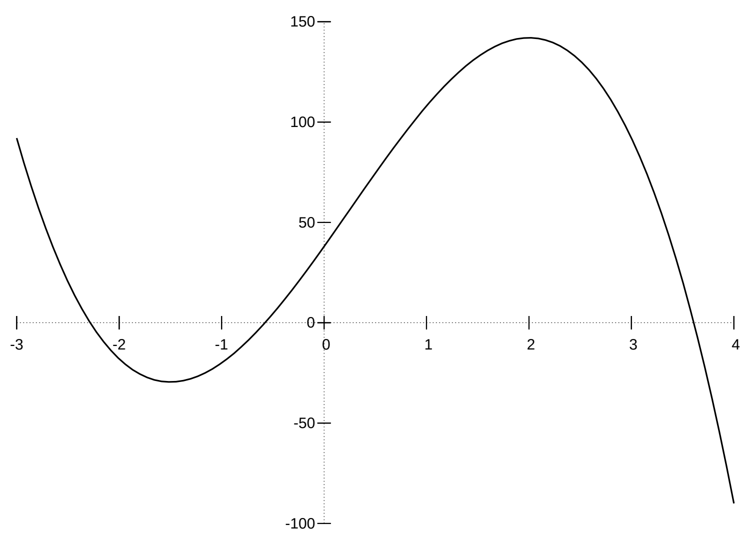
x	-3		$-\frac{3}{2}$		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	92	$\searrow$	$-\frac{59}{2}$	$\nearrow$	142	$\searrow$	-90

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{59}{2} = -29{,}5$$

2) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	92	-18	-20	38	108	142	92

3) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;



4) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = -2,3$; $x = -0,6$ et $x = 3,6$.