Contrôle de Mathématique (**A**)

Correction.

EXERCICE 1

1) On dérive la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) On dérive la fonction définie par $f(x) = 12x + 4$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12 \times 1 + 0 \\ &= 12 \end{aligned}$$

3) On dérive la fonction définie par $f(x) = 2x^9 + 10x^4 - 4x^3 + \frac{2}{3}x + \sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 9x^{9-1} + 10 \times 4x^{4-1} - 4 \times 3x^{3-1} + \frac{2}{3} \times 1 + 0 \\ &= 18x^8 + 40x^3 - 12x^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

4) On dérive la fonction définie par $f(x) = (2x^2 + 2)\cos(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x + 0) \times \cos(x) + (2x^2 + 2) \times (-\sin(x)) \\ &= 4x\cos(x) - (2x^2 + 2)\sin(x) \end{aligned}$$

5) On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^4 + 4}{x^2 + 2x + 2}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(8x^3) \times (x^2 + 2x + 2) - (2x^4 + 4) \times (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &= \frac{8x^5 + 16x^4 + 16x^3 - (4x^5 + 4x^4 + 8x + 8)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\ &= \frac{4x^5 + 12x^4 + 16x^3 - 8x - 8}{(x^2 + 2x + 2)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $[-5; 2]$ par $f(x) = 8x^3 + 30x^2 - 36x - 20$

1) **a.** Calcul de la dérivée : $f'(x) = 8 \times 3x^{3-1} + 30 \times 2x^{2-1} - 36 = 24x^2 + 60x - 36$.
De plus, $(24x - 12)(x + 3) = 24x^2 + 72x - 12x - 36 = 24x^2 + 60x - 36 = f'(x)$.

b. Résolution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:
Puisque $f'(x) = (24x - 12)(x + 3)$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :

- $24x - 12 = 0$ si et seulement si $24x = 12$, c'est-à-dire si $x = \dfrac{12}{24} = \dfrac{1}{2}$.
  De plus $24 > 0$, ce qui justifie la deuxième ligne du tableau de signes.
- $x + 3 = 0$ si et seulement si $x = -3$. De plus $1 > 0$, ce qui justifie la troisième ligne du tableau de signes.

On complète le tableau par la règle des signes. On a donc le tableau de signe suivant :

x	-5		-3		$\frac{1}{2}$		2
$24x-12$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les solutions de l'inéquation sont les $x \in [-5;-3] \cup [\frac{1}{2};2]$

c. Tableau de variation de la fonction f.

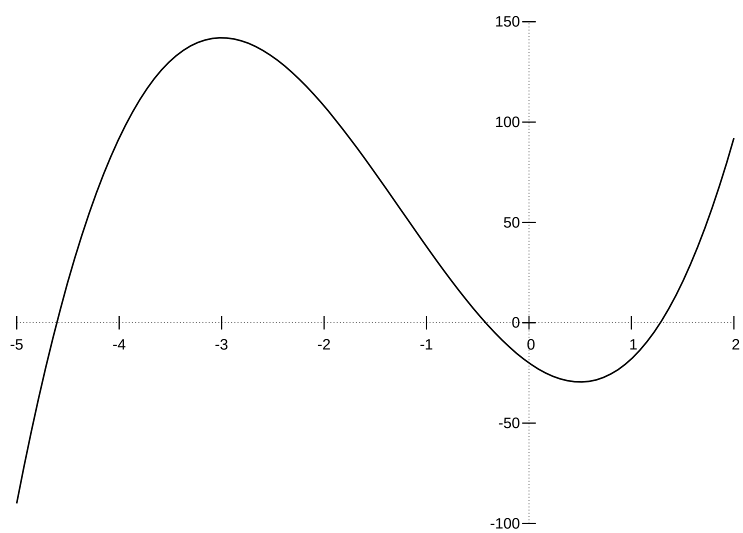
x	-5		-3		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-90	$\nearrow$	142	$\searrow$	$-\frac{59}{2}$	$\nearrow$	92

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{59}{2} = -29{,}5$$

2) Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	92	142	108	38	-20	-18	92

3) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;



4) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = 1,3$; $x = -0,4$ et $x = -4,6$.