Contrôle de Mathématique (**B**)

Correction.

EXERCICE 1

1) On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

2) On dérive la fonction définie par $f(x) = 5x + 3$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \times 1 + 0 \\ &= 5 \end{aligned}$$

3) On dérive la fonction définie par $f(x) = 3x^7 - 6x^5 + x^2 + \sqrt{2}x + \dfrac{1}{5}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times 7x^{7-1} - 6 \times 5x^{5-1} + 2x^{2-1} + \sqrt{2} \times 1 + 0 \\ &= 21x^6 - 30x^4 + 2x + \sqrt{2} \end{aligned}$$

4) On dérive la fonction définie par $f(x) = (x^3 + 3)\sin(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 0) \times \sin(x) + (x^3 + 3) \times (\cos(x)) \\ &= 3x^2 \sin(x) + (x^3 + 3)\cos(x) \end{aligned}$$

5) On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2x - 2}{2x^3 + 1}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x + 2) \times (2x^3 + 1) - (2x^2 + 2x - 2) \times (6x^2)}{(2x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{8x^4 + 4x + 4x^3 + 2 - (12x^4 + 12x^3 + 12x^2)}{(2x^3 + 1)^2} \\ &= \frac{-4x^4 - 8x^3 - 12x^2 + 4x + 2}{(2x^3 + 1)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $[-3; 4]$ par $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 36x + 19$

1) **a.** Calcul de la dérivée : $f'(x) = -4 \times 3x^{3-1} + 3 \times 2x^{2-1} + 36 = -12x^2 + 6x + 36$.
De plus, $(2x + 3)(-6x + 12) = -12x^2 + 24x - 18x + 36- = -12x^2 + 6x + 36 = f'(x)$.

b. Résolution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:
Puisque $f'(x) = (2x + 3)(-6x + 12)$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :

- $2x + 3 = 0$ si et seulement si $2x = -3$, c'est-à-dire si $x = -\dfrac{3}{2}$.
  De plus $2 > 0$, ce qui justifie la deuxième ligne du tableau de signes.
- $-6x + 12 = 0$ si et seulement si $-6x = -12$, c'est-à-dire si $x = \dfrac{-12}{-6} = 2$.
  De plus $-6 < 0$, ce qui justifie la troisième ligne du tableau de signes.

On complète le tableau par la règle des signes. On a donc le tableau de signe suivant :

x	-3		$-\frac{3}{2}$		2		4
$2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-6x+12$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc les solutions de l'inéquation sont les $x \in \left[-\frac{3}{2}; 2\right]$

c. Tableau de variation de la fonction f.

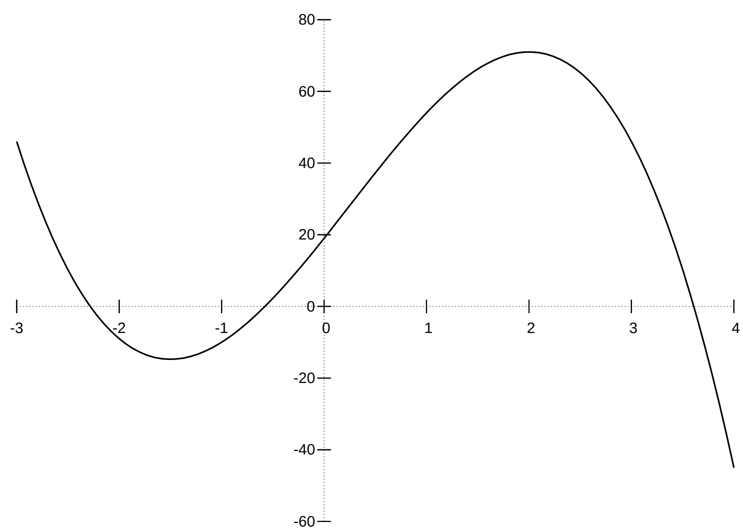
x	-3		$-\frac{3}{2}$		2		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	46	$\searrow$	$-\frac{59}{4}$	$\nearrow$	71	$\searrow$	-45

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{59}{4} = -14{,}75$$

2) Tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	46	-9	-10	19	54	71	46

3) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;



4) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = -2,3$; $x = -0,6$ et $x = 3,6$.