Contrôle de Mathématique (**B**)

Correction.

EXERCICE 1

1) On dérive la fonction définie par $f(x) = \sin(x)$:
$$f'(x) = \cos(x)$$

2) On dérive la fonction définie par $f(x) = 2x + 7$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 1 + 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

3) On dérive la fonction définie par $f(x) = 4x^5 + 6x^3 + \sqrt{3}x + \dfrac{1}{3}$:
$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times 5x^{5-1} + 6 \times 3x^{3-1} + \sqrt{3} \times 1 + 0 \\ &= 20x^4 + 18x^2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

4) On dérive la fonction définie par $f(x) = (7x + 1)(x^2 + 1)$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= 7 \times (x^2 + 1) + (7x + 1) \times (2x) \\ &= 7x^2 + 7 + 14x^2 + 2x \\ &= 21x^2 + 2x + 7 \end{aligned}$$

5) On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 4) \times (x^2 + 2x) - (x^2 + 4x + 4) \times (2x + 2)}{(x^2 + 2x)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 4x^2 + 4x^2 + 8x - (2x^3 + 2x^2 + 8x^2 + 8x + 8x + 8)}{(x^2 + 2x)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 8x - 8}{(x^2 + 2x)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $[-3; 3]$ par $f(x) = -x^3 - x^2 + 5x + 6$

1) **a.** Calcul de la dérivée : $f'(x) = -3x^{3-1} - 2x^{2-1} + 5 = -3x^2 - 2x + 5$.
De plus, $(-x + 1)(3x + 5) = -3x^2 - 5x + 3x + 5 = -3x^2 - 2x + 5 = f'(x)$.

b. Résolution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:
Puisque $f'(x) = (-x + 1)(3x + 5)$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :

- $3x + 5 = 0$ si et seulement si $3x = -5$, c'est-à-dire si $x = -\dfrac{5}{3}$. De plus $3 > 0$, ce qui justifie la deuxième ligne du tableau de signes.
- $-x + 1 = 0$ si et seulement si $x = 1$. De plus $-1 < 0$, ce qui justifie la troisième ligne du tableau de signes.

On a donc le tableau de signe suivant :

x	-3		$-\frac{5}{3}$		1		3
$3x+5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc les solutions de l'inéquation sont les $x \in [-\frac{5}{3}; 1]$

c. Tableau de variation de la fonction f.

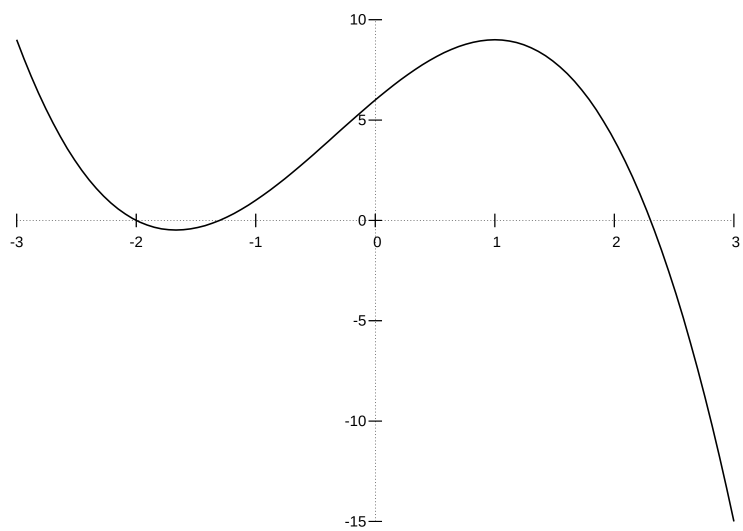
x	-3		$-\frac{5}{3}$		1		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	9	$\searrow$	$-0{,}48$	$\nearrow$	9	$\searrow$	-15

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{13}{27} \simeq -0{,}48$$

2) Tableau de valeurs (résultats arrondis à 0,1 près) :

x	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	0	1	6	9	4

3) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;



4) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = -2$; $x = -1,3$ et $x = 2,3$.