Contrôle de Mathématique (**A**)

Correction.

EXERCICE 1

1) On dérive la fonction définie par $f(x)=\sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2) On dérive la fonction définie par $f(x)=6x+2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\times 1+0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

3) On dérive la fonction définie par $f(x)=x^9+5x^4-2x^3+\frac{1}{3}x+\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9x^{9-1}+5\times 4x^{4-1}-2\times 3x^{3-1}+\frac{1}{3}\times 1+0 \\ &= 9x^8+20x^3-6x^2+\frac{1}{3} \end{aligned}$$

4) On dérive la fonction définie par $f(x)=(x^2+1)\cos(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u\times v)'=u'v+uv'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+0)\times\cos(x)+(x^2+1)\times(-\sin(x)) \\ &= 2x\cos(x)-(x^2+1)\sin(x) \end{aligned}$$

5) On dérive la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x^4+2}{x^2+2x+2}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x^3)\times(x^2+2x+2)-(x^4+2)\times(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} \\ &= \frac{4x^5+8x^4+8x^3-(2x^5+2x^4+4x+4)}{(x^2+2x+2)^2} \\ &= \frac{2x^5+6x^4+8x^3-4x-4}{(x^2+2x+2)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $[-5;2]$ par $f(x)=4x^3+15x^2-18x-10$

1) **a.** Calcul de la dérivée : $f'(x)=4\times 3x^{3-1}+15\times 2x^{2-1}-18=12x^2+30x-18$.
De plus, $(12x-6)(x+3)=12x^2+36x-6x-18=12x^2+30x-18=f'(x)$.

b. Résolution de l'inéquation $f'(x)\geqslant 0$:
Puisque $f'(x)=(12x-6)(x+3)$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :

- $12x-6=0$ si et seulement si $12x=6$, c'est-à-dire si $x=\dfrac{6}{12}=\dfrac{1}{2}$.
  De plus $12>0$, ce qui justifie la deuxième ligne du tableau de signes.
- $x+3=0$ si et seulement si $x=-3$. De plus $1>0$, ce qui justifie la troisième ligne du tableau de signes.

On complète le tableau par la règle des signes. On a donc le tableau de signe suivant :

x	-5		-3		$\frac{1}{2}$		2
$12x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les solutions de l'inéquation sont les $x \in [-5;-3] \cup [\frac{1}{2};2]$

c. Tableau de variation de la fonction f.

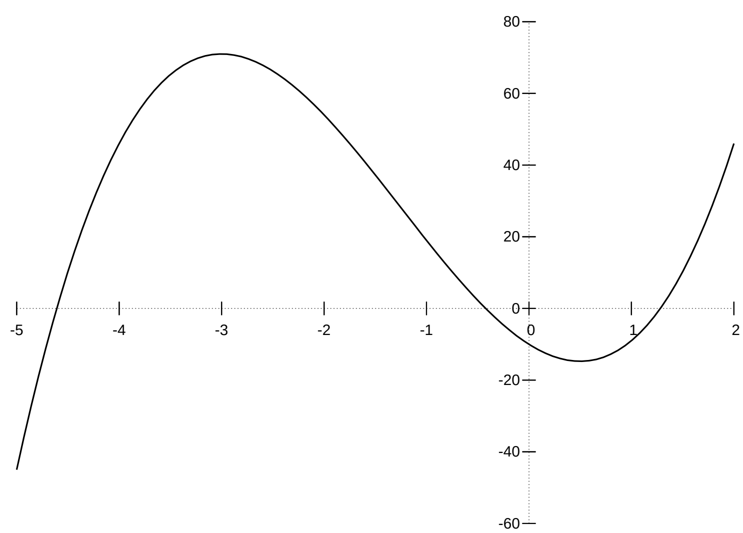
x	-5		-3		$\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-45	$\nearrow$	71	$\searrow$	$-\frac{59}{4}$	$\nearrow$	46

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{59}{4} = -14{,}75$$

2) Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	46	71	54	19	-10	-9	46

3) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;



4) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = 1,3$; $x = -0,4$ et $x = -4,6$.