Contrôle de Mathématique (**A**)

Correction.

EXERCICE 1

1) On dérive la fonction définie par $f(x) = \cos(x)$:

$$f'(x) = -\sin(x)$$

2) On dérive la fonction définie par $f(x) = 7x + 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 7 \times 1 + 0 \\ &= 7 \end{aligned}$$

3) On dérive la fonction définie par $f(x) = 3x^6 + 7x^2 + \sqrt{5}x + \dfrac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times 6x^{6-1} + 7 \times 2x^{2-1} + \sqrt{5} \times 1 + 0 \\ &= 18x^5 + 14x + \sqrt{5} \end{aligned}$$

4) On dérive la fonction définie par $f(x) = (x^2+x+1)(x^3+2)$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1) \times (x^3+2) + (x^2+x+1) \times 3x^2 \\ &= 2x^4 + 4x + x^3 + 2 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 \\ &= 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \end{aligned}$$

5) On dérive la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ en utilisant la formule de dérivation d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+2) \times (x^2-1) - (x^2+2x+1) \times (2x+0)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 2x + 2x^2 - 2 - (2x^3 + 4x^2 + 2x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 4x - 2}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $[-4; 2]$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$

1) **a.** Calcul de la dérivée : $f'(x) = 3x^{3-1} + 2 \times 2x^{2-1} - 4 = 3x^2 + 4x - 4$.
De plus, $(3x-2)(x+2) = 3x^2 + 6x - 2x - 4 = 3x^2 + 4x - 4 = f'(x)$.

b. Résolution de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$:
Puisque $f'(x) = (3x-2)(x+2)$, nous allons étudier le signe de chacun des facteurs :

- $3x - 2 = 0$ si et seulement si $3x = 2$, c'est-à-dire si $x = \dfrac{2}{3}$. De plus $3 > 0$, ce qui justifie la deuxième ligne du tableau de signes.
- $x + 2 = 0$ si et seulement si $x = -2$. De plus $1 > 0$, ce qui justifie la troisième ligne du tableau de signes.

On complète le tableau par la règle des signes. On a donc le tableau de signe suivant :

x	-4		-2		$\frac{2}{3}$		2
$3x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les solutions de l'inéquation sont les $x \in [-4;2] \cup [\frac{2}{3};2]$

c. Tableau de variation de la fonction f.

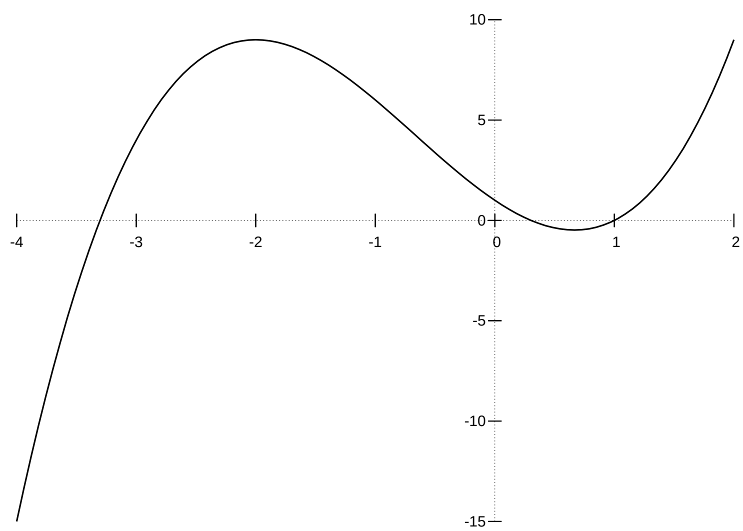
x	-4		-2		$\frac{2}{3}$		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	-15	$\nearrow$	9	$\searrow$	$-0{,}48$	$\nearrow$	9

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{27} \simeq -0{,}48$$

2) Tableau de valeurs (résultats arrondis à 0,1 près) :

x	-4	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-15	4	9	6	1	0

3) Plaçons les extrema de la fonction f, et les points donnés dans le tableau de valeurs, puis traçons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal ;



4) Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont $x = -3,3$; $x = 0,3$ et $x = 1$.