Suites numériques

5 novembre 2009

I Généralités

A Introduction

Exemple 1. [Si vous travaillez chaque mois, vous recevez un salaire : un nombre.]

Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre	Janvier	Février	Mars	Avril	...
$= u_0$	$= u_1$	$= u_2$	$= u_3$	$= u_4$	$= u_5$	$= u_6$	$= u_7$	$= u_8$	$= u_9$	...

On a obtenu une suite de nombres : u_0, u_1, u_2, $\dots$

Exemple 2 (Si pas d'autre bonne idée dans l'assistance)**.** À chaque anniversaire, vous vous mesurez (en cm). u_0 =[taille à la naissance], u_1 =[taille à un an], etc...

Remarque 3. • Pour une suite quelconque, on ne peut pas deviner u_{10} en connaissant u_9, ou en connaissant tous les autres u_n.
• Une suite ne s'arrête jamais : elle est infinie (on ne meurt jamais). Pour tout nombre n, aussi grand qu'on le prenne, u_n existe.

B Définitions

Définition 4. Si, à chaque entier $n \geq 0$, on associe un nombre réel u_n, on dit que l'ensemble (ordonné) des nombres u_n forme la *suite de terme général* u_n, que l'on note (u_n).

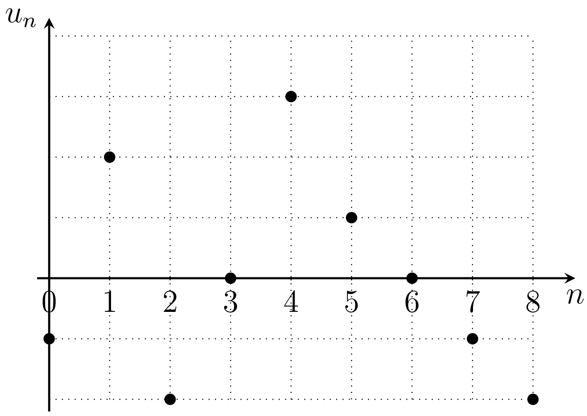
[Les indices sont en ... *indice*, bien en bas.]

Remarque 5. On s'intéressera plus particulièrement aux suites dont les termes ont des liens logiques entre eux.
Vous verrez, dans ce cas, deux façon de définir une suite :
– Par récurrence
– Par une formule en fonction de n. (qui permet de calculer *directement* un terme).

Remarque 6. Toujours tester les formules obtenues : est-ce que, si on remplace n par 0, 1, 2 ou 3, on obtient bien la même valeur que par le calcul direct ?

C Représentation graphique

Il n'y a que des *points* isolés, car u_n n'existe que pour n entier ($n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, ...).



D Variations

Définition 7.
– La suite (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} \geq u_n$ (i.e. $u_{n+1} - u_n \geq 0$).
– La suite (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$ (i.e. $u_{n+1} - u_n \leq 0$).
– La suite (u_n) est constante si et seulement si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.

(les définitions pour strictement croissant et décroissant sont laissées en exercice au lecteur)

II Suites arithmétiques

A Définition

Dans une suite arithmétique, chaque terme s'obtient en ajoutant un nombre r constant au terme précédent :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} u_0 & & \text{fixé,} \\ u_{n+1} & = & u_n + r \end{array}}$$

Vocabulaire : le nombre r est appelé la *raison*.

Exemple 8. La suite de l'exercice 1 est définie par :
$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1460 \\ u_{n+1} & = & u_n + 20 \end{array}$ C'est une suite arithmétique de raison 20.

B Expression du terme général en fonction de n

Si (u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r, alors, pour tout entier n positif,

$$\boxed{u_n = u_0 + r \times n}$$

Exemple 9. Le terme général de la suite de l'exercice 1 s'exprime ainsi : $u_n = 1460 + 20 \times n$

faire l'exercice 4

C Variations

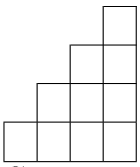
Une suite arithmétique (u_n) de raison r est
– croissante si $r \geq 0$
– décroissante si $r \leq 0$
– constante si $r = 0$

Exemple 10. **1)** La suite de l'exercice 1 est croissante.
2) La suite de l'exercice 4 est décroissante.

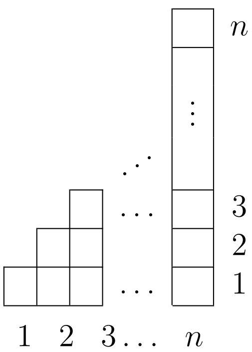
D Somme des termes d'une suite arithmétique

D.1 La somme des n premiers entiers naturels :

On cherche à calculer $1+2+3+4+\cdots+n$. On essaye donc d'obtenir une formule (qui dépendra de n) permettant de calculer directement la valeur de cette somme. Pour cela, on considère des petits carrés $\square$ de taille 1×1. Chercher à calculer la somme $1+2+3+4$, c'est la même chose que chercher à calculer l'aire de l'objet suivant :



C'est le triangle inférieur d'un carré de coté 4, plus 4 demi-cases (ce qui dépasse de la diagonale). Or l'aire du carré est 4×4, donc $1+2+3+4 = \dfrac{4 \times 4}{2} + \dfrac{4}{2}$.
On procède de même pour $1+2+3+4+\cdots+n$:



Donc $1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n \times n}{2} + \dfrac{n}{2}$.
On factorise et on obtient finalement le résultat suivant :

$$1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

D.2 Cas général :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \frac{(2u_0 + nr)(n+1)}{2}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n &= u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+(u_0+3r)+\cdots+(u_0+nr)\\
&= u_0(n+1)+1r+2r+3r+\cdots+nr\\
&= \frac{(2u_0+nr)(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

III Suites géométriques

A Définition

Dans une suite géométrique, chaque terme s'obtient en multipliant par un nombre q constant le terme précédent :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} u_0 & & \text{fixé,} \\ u_{n+1} & = & q \times u_n \end{array}}$$

<u>Vocabulaire</u> : le nombre q est appelé la *raison*.

Exemple 11. La suite de l'exercice 2 est définie par :
$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 2 \times u_n \end{array}$ C'est une suite géométrique de raison 2.

Exemple 12. La suite de l'exercice 3 est définie par :
$\begin{array}{rcl} u_0 & = & 100 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{9}{10} \times u_n \end{array}$ C'est une suite géométrique de raison $\dfrac{9}{10}$.

B Expression du terme général en fonction de n

Si (u_n) est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, alors, pour tout entier n positif,

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Exemple 13. Le terme général de la suite de l'exercice 2 s'exprime ainsi : $u_n = 2^n$

Exemple 14. Le terme général de la suite de l'exercice 3 s'exprime ainsi : $u_n = 100 \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^n$

faire l'exercice 6

C Variations

Une suite géométrique (u_n) de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$ est
- croissante si $q \geq 1$
- décroissante si $q \leq 1$
- constante si $q = 1$

Exemple 15. **1)** La suite de l'exercice 2 est croissante.

2) La suite de l'exercice 4 est décroissante.

D Somme des termes d'une suite géométrique

Dans toute cette partie, on suppose que la suite n'est pas constante, c'est-à-dire $q \neq 1$.

D.1 Calcul de $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$

On cherche à calculer la somme $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$. L'idée, c'est de multiplier S_n par q :

$$\begin{aligned} q \times S_n &= q\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n\right) \\ &= q + (q \times q) + (q \times q^2) + (q \times q^3) + \cdots + (q \times q^n) \\ &= q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1} \end{aligned}$$

Écrivons S_n et qS_n l'un au-dessus de l'autre, en alignant les puissances :

$$\begin{array}{rcccccccccccccccc} S_n & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & q^3 & + & & \ldots & & + & q^{n-1} & + & q^n & & \\ qS_n & = & & & q & + & q^2 & + & q^3 & + & q^4 & + & \ldots & & & + & q^n & + & q^{n+1} \end{array}$$

Donc, si on fait la différence des deux lignes, on obtient : $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$.
De plus $S_n - qS_n = (1-q)S_n$, donc $(1-q)S_n = 1 - q^{n+1}$. D'où le résultat :

$$\boxed{S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$

D.2 Cas général :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

On cherche à calculer la somme $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

$$\begin{aligned} S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n &= u_0 + (u_0 q) + (u_0 q^2) + (u_0 q^3) + \cdots + (u_0 q^n) \\ &= u_0\left(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n\right) \\ &= u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}}$$