Exercices de révision — Bac S 2010 — Mathématiques

Table des matières

1 Analyse

1.1 Exponentielle

Exercice 1 (Amérique du Sud, septembre 2009, 5 points)
Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\right) \mathrm{d}x$$

1) **a)** Étudier les variations de la fonction $f\ : x \longmapsto f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

b) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 1]$, on a $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

2) Soit J et K les intégrales définies par $J = \displaystyle\int_0^1 (2+x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $K = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

b) Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant K \leqslant \dfrac{1}{6}$.

c) Démontrer que $J + K = 4I$.

d) Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I, puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I.

Exercice 2 (Nouvelle Calédonie, septembre 2009, 5 points)
Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}.$$

On note f' la fonction dérivée de f.

1) **a)** Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et déterminer le tableau de variations de f.

c) En déduire le signe de f sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout nombre réel a, on considère l'intégrale : $I(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Donner selon les valeurs de a le signe de $I(a)$.

b) À l' aide d'une double intégration par parties montrer que pour tout nombre réel a :

$$I(a) = 2 - 2\mathrm{e}^{-a}\left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

c) En déduire pour tout nombre réel a :

$$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{a} I(a) = \mathrm{e}^{a} - \left(1 + a + \frac{a^2}{2}\right).$$

3) Soient g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $h(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g et $\mathscr{P}$ celle de h.

a) Montrer que les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ ont la même tangente au point d'abscisse 0.

b) Déduire des questions précédentes la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.

1.2 Logarithme

Exercice 3 (Pondichéry, avril 2010, 6 points)
Partie A - Restitution organisée de connaissances :
Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$
- Si pour tout $t \in [a\ ;\ b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geqslant 0.$

Montrer que : si pour tout $t \in [a\ ;\ b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t.$

Partie B
Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f_n(x) = \ln\left(1 + x^n\right)$$

et on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + x^n\right)\ \mathrm{d}x$.
On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) **a)** Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
b) Étudier les variations de f_1 sur $[0\ ;\ +\infty[$.
c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat.
(Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant :
pour tout $x \in [0\ ;\ 1]$, $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$)

2) **a)** Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.
b) Étudier les variations de la suite (I_n)
c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3) Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1 + x) - x.$$

a) Étudier le sens de variation de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.
b) En déduire le signe de g sur $[0\ ;\ +\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a

$$\ln\left(1 + x^n\right) \leqslant x^n.$$

c) En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice 4 (France métropolitaine, septembre 2009, 6 points)
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + 4\right).$$

Partie A

1) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

a) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

b) Montrer que sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α.
Donner la valeur arrondie de α à 10^{-1} .

c) Justifier que le nombre réel α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

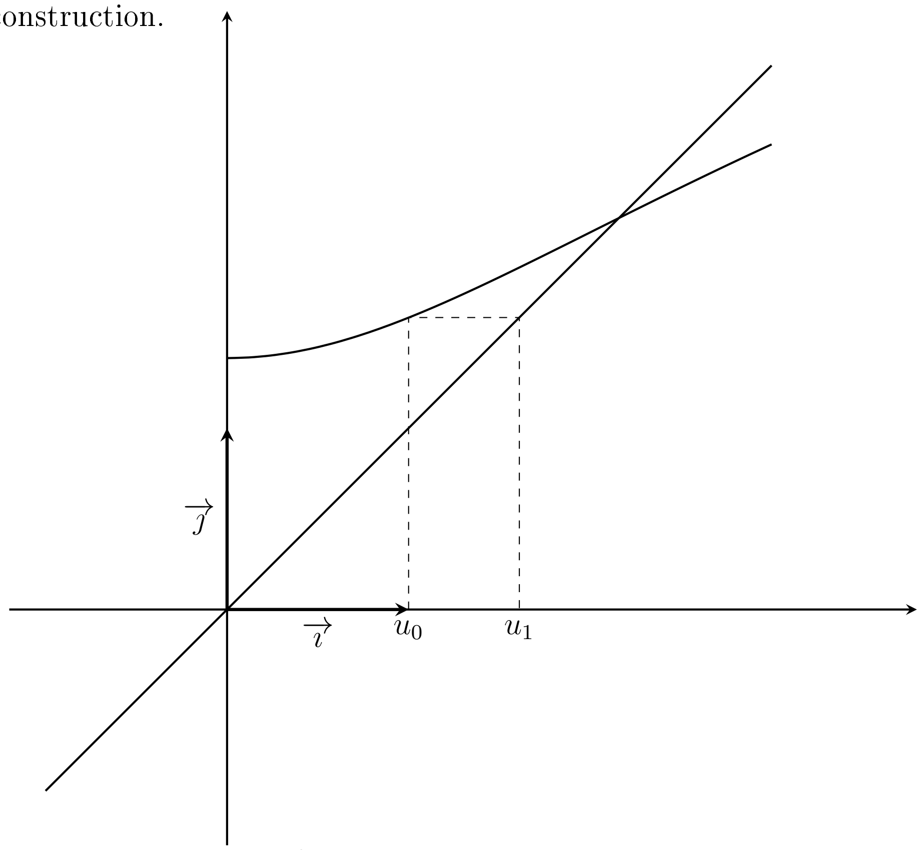
Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par : $u_{n+l} = f(u_n)$.

La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$ sont tracées sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

1) À partir de u_0, en utilisant la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ, on a placé u_1 sur l'axe des abscisses. De la même manière, placer les termes u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.



2) Placer le point I de la courbe $\mathscr{C}$ qui a pour abscisse α.

3) **a)** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a $1 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

c) Déterminer sa limite.

Exercice 5 (Antilles-Guyane, septembre 2009, 6 points)

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = 1 + x \ln x.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ 1]$.

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

$\mathscr{T}$ est la droite d'équation $y = x$.

La courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{T}$ sont représentées sur le schéma ci-dessous.

1) a) Justifier que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

b) En utilisant le signe de $x \ln x$ sur $]0\,;\ 1]$, montrer que, pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$, on a $f(x) \leqslant 1$.

2) a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$.

b) Vérifier que la droite $\mathscr{T}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

3) On note g la fonction définie pour tout nombre réel $x \in]0\ ;\ 1]$ par

$$g(x) = 1 + x \ln x - x.$$

a) Étudier les variations de g sur l'intervalle $]0\,; 1]$ et dresser le tableau de variation de g. On ne cherchera pas la limite de g en 0.

b) En déduire les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{T}$.

4) Soit α un nombre réel tel que $0 < \alpha < 1$.

On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_{\alpha}^{1} [1 - f(x)]\ \mathrm{d}x$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{2} \ln \alpha + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\alpha^2}{4}$.

b) Déterminer $\lim_{\alpha \to 0} I(\alpha)$.

c) Interpréter graphiquement le résultat précédent.

d) À l'aide des résultats précédents, déterminer, en unités d'aire, l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite $\mathscr{T}$ et l'axe des ordonnées.

1.3 Autres

Exercice 6 (Antilles-Guyane, juin 2008, 6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}.$$

Partie A :

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3\mathrm{e}^{-3x}$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E$'$) : $y' + 2y = 0$.

2) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ est solution de (E$'$).

3) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}$ est solution de l'équation (E).

4) En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B :

On nomme $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1 cm.

1) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.

3) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f.

4) Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les axes du repère.

5) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

6) Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2.

Exercice 7 (Pondichéry, juin 2008, 7 points)
On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat, en fonction de l'année.
Les parties A et B sont indépendantes
Partie A : un modèle discret
Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n\left(20 - u_n\right).$$

1) Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$

- **a)** Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.
- **b)** En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.
- **c)** On donne en **annexe** la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
  Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$.

2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.

3) Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu
Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x.
On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution, qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, de l'équation différentielle

$$(\mathrm{E}) \quad ; \quad y' = \frac{1}{20}y(10 - y).$$

1) On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on pose $z = \dfrac{1}{y}$.

- **a)** Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :
  $$(\mathrm{E}_1) \quad : \quad z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$
- **b)** Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2) Montrer que g est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3) Étudier les variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4) Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5) En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Exercice 8 (Liban, juin 2008, 5 points)
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.
On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+e^{-2}$	$\searrow$	1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Partie A

1) En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe $(\mathcal{C})$ susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

2) **a)** Interpréter graphiquement $g(2)$.

b) Montrer que $0 \leqslant g(2) \leqslant 2,5$.

3) **a)** Soit x un réel supérieur à 2.

Montrer que $\displaystyle\int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant x-2$. En déduire que $g(x) \geqslant x-2$.

b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4) Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Partie B
On admet que pour tout réel t, $f(t) = (t-1)\mathrm{e}^{-t} + 1$.

1) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\displaystyle\int_0^x (t-1)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

2) En déduire que pour tout réel x, $g(x) = x\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)$.

3) Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

Exercice 9 (Amérique du Nord, juin 2008, 4 points)
On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t\,\mathrm{d}t.$$

1) **a)** Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b) Étudier les variations de la suite (x_n).

c) Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2) **a)** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

b) En déduire la limite de la suite (x_n).

3) **a)** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$.

4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} nx_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ny_n$.

Exercice 10 (Nouvelle Calédonie, juin 2007, 7 points)
Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Partie A

1) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$

2) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3) Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).
Partie B
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

1) **a)** Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}$$

b) Vérifier que $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - f(n)$

c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) \leqslant \frac{1}{n(n+1)}$$

2) On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{2n(2n+1)}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leqslant S_n$$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

c) En déduire l'égalité

$$S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

d) En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)$$

e) Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

f) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 11 (Pondichéry, avril 2010, 4 points)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2) **a)** Démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, $u_n \geqslant 0$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 5$, $u_n \geqslant n - 3$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$.

a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 12 (Antilles-Guyane, septembre 2009, 4 points)
VRAI OU FAUX
Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée.
Partie A
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n$.

1) La suite (u_n) est bornée.

2) La suite (u_n) converge.

3) La suite de terme général $\frac{u_n}{n}$ converge.

4) Toute suite (v_n) à termes strictement positifs et décroissante converge vers 0.

Partie B

1) Si A et B sont deux évènements indépendants avec $P(B) \neq 0$ et $P(B) \neq 1$, alors $P(A \cap B) = P_B(A)$.

2) Si X est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0\,;\,1]$, alors $P\left(X \in [0,1\ ;\ 0,6]\right) = 0,6$.

3) Si X est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres 100 et $\dfrac{1}{3}$, alors $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^{100}$.

---

2 Probabilités

Exercice 13 (Nouvelle Calédonie, juin 2007, 4 points)

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 *point.*

Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$ **b.** $\dfrac{9}{8}$ **c.** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$ **d.** $\dfrac{4\times 3\times 2}{8\times 7\times 6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0 **b.** $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$ **c.** $\dfrac{23}{128}$ **d.** $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ lorsque

a. $m = -1$ **b.** $m = \dfrac{1}{2}$ **c.** $m = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$ **d.** $m = \mathrm{e}^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre $0,2$.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est

a. $1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **b.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ **c.** $\dfrac{1}{5\mathrm{e}}$ **d.** $\dfrac{1}{0,2}(\mathrm{e}-1)$

Exercice 14 (France métropolitaine, septembre 2009, 5 points)

Un réparateur de vélos a acheté 30 % de son stock de pneus à un premier fournisseur, 40 % à un deuxième et le reste à un troisième.

Le premier fournisseur produit 80 % de pneus sans défaut, le deuxième 95 % et le troisième 85 %.

1) Le réparateur prend au hasard un pneu de son stock.

   a) Construire un arbre de probabilité traduisant la situation, et montrer que la probabilité que ce pneu soit sans défaut est égale à 0,875.

   b) Sachant que le pneu choisi est sans défaut, quelle est la probabilité qu'il provienne du deuxième fournisseur ? On donnera la valeur arrondie du résultat à 10^{-3}.

2) Le réparateur choisit dix pneus au hasard dans son stock. On suppose que le stock de pneus est suffisamment important pour assimiler ce choix de dix pneus à un tirage avec remise de dix

pneus.
Quelle est alors la probabilité qu'au plus un des pneus choisis présente un défaut ? On donnera la valeur arrondie à 10^{-3}.

3) On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus par un pneu, sans crevaison. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle que, pour tout nombre réel k positif : $P(X \leqslant k) = \displaystyle\int_0^k \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$

a) Montrer que $P(500 \leqslant X \leqslant 1000) = \mathrm{e}^{-500\lambda} - \mathrm{e}^{-1000\lambda}$.

b) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1000 kilomètres sans crevaison étant égale à $\dfrac{1}{4}$, déterminer la valeur arrondie à 10^{-4} du paramètre λ.

Exercice 15 (Pondichéry, avril 2010, 5 points)

Une urne contient 10 boules blanches et n boules rouges, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2. On fait tirer à un joueur des boules de l'urne. À chaque tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 euros et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 euros.

On désigne par X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur.

Les trois questions de l'exercice sont indépendantes.

1) Le joueur tire deux fois successivement et sans remise une boule de l'urne.

a) Démontrer que : $P(X = -1) = \dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.

b) Calculer, en fonction de n la probabilité correspondant aux deux autres valeurs prises par la variable X.

c) Vérifier que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X vaut :

$$\mathrm{E}(X) = \frac{-6n^2 - 14n + 360}{(n+10)(n+9)}.$$

d) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'espérance mathématique est strictement positive.

2) Le joueur tire 20 fois successivement et avec remise une boule de l'urne. Les tirages sont indépendants. Déterminer la valeur minimale de l'entier n afin que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge au cours de ces 20 tirages soit strictement supérieure à $0,999$.

3) On suppose que $n = 1000$. L'urne contient donc 10 boules blanches et 1000 boules rouges.

Le joueur ne sait pas que le jeu lui est complètement défavorable et décide d' effectuer plusieurs tirages sans remise jusqu'à obtenir une boule blanche.

Le nombre de boules blanches étant faible devant celui des boules rouges, on admet que l'on peut modéliser le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche par une variable aléatoire Z suivant la loi :

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ p(Z \leqslant k) = \int_0^k 0,01\mathrm{e}^{-0,01x}\,\mathrm{d}x.$$

On répondra donc aux questions suivantes à l'aide de ce modèle.

a) Calculer la probabilité que le joueur ait besoin de tirer au plus 50 boules pour avoir une boule blanche, soit $P(Z \leqslant 50)$.

b) Calculer la probabilité conditionnelle de l'évènement : « le joueur a tiré au maximum 60 boules pour tirer une boule blanche » sachant l'évènement « le joueur a tiré plus de 50 boules pour tirer une boule blanche ».

Exercice 16 (Amérique du Sud, septembre 2009, 4 points)
On considère un questionnaire comportant cinq questions.
Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.
Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.
Par exemple, le mot « $BBAAC$ » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1) **a)** Combien y-a-t'il de mots-réponses possible à ce questionnaire ?

b) On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des évènements suivants :

E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « $BACAB$ » est un palindrome).

2) Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a) Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \dfrac{32}{243}$.

b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2}, qu'au plus un élève n'ait fourni que des réponses fausses.

Exercice 17 (Nouvelle Calédonie, septembre 2009, 5 points)
Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un toboggan et d'un plongeoir.
On a observé que si un manchot choisit le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est $0,3$.
Si un manchot choisit le plongeoir, la probabilité qu'il le reprenne est $0,8$.
Lors du premier passage les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.
Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'évènement :

- T_n : « le manchot utilise le toboggan lors de son n-ième passage. »
- P_n : « le manchot utilise le plongeoir lors de son n-ième passage. »

On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

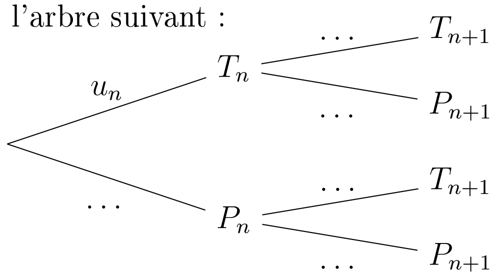
$$u_n = p\left(T_n\right)$$

où $p\left(T_n\right)$ est la probabilité de l'évènement T_n.

1) **a)** Donner les valeurs des probabilités $p\left(T_1\right)$, $p\left(P_1\right)$ et des probabilités conditionnelles $p_{T_1}\left(T_2\right)$, $p_{P_1}\left(T_2\right)$.

b) Montrer que $p\left(T_2\right) = \dfrac{1}{4}$.

c) Recopier et compléter l'arbre suivant :



d) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2$.

e) À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant la limite de la suite (u_n).

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = u_n - \frac{2}{9}.$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. Préciser son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

c) Calculer la limite de la suite (u_n). Ce résultat permet-il de valider la conjecture émise en 1. e. ?

Exercice 18 (France métropolitaine, juin 2006, 3 points)

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.
Une partie consiste à effectuer deux lancers sucessifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.
On considère les évènements suivants :
E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,
F est l'évènement « à l'issue d une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1) Calculer les probabilités des évènements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.

2) On effectue dix parties identiques et indépendantes.
Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré.
Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance, ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d^2_{obs} le réel $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}\left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.

On simule ensuite 1000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble (1 ; 2 ; 3 ; 4) puis, pour chaque simulation, on calcule

$$d^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$$

où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i. Le 9e décile de la série statistique des 1000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098.
Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?

Exercice 19 (Polynésie, septembre 2009, 4 points)
Pour chaque question, deux propositions sont énoncées.
Il s'agit de dire, sans le justifier, si chacune d'elles est vraie ou fausse. ***Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la proposition et la mention VRAIE ou FAUSSE****.*
Pour chaque question, il est compté 1 *point si les deux réponses sont exactes,* 0,5 *point pour une réponse exacte et une absence de réponse et* 0 *point sinon.*

Question A Une urne contient 4 boules noires et 3 boules rouges indiscernables au toucher. On tire deux boules au hasard simultanément. On considère les évènements : A : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; B : « une seule des deux boules tirées est rouge ».	Proposition 1 La probabilité de A est égale à $\frac{3}{7}$.	Proposition 2 La probabilité de B est égale à $\frac{1}{7}$.
Question B Soient A, B et C trois évènements d'un même univers Ω muni d'une probabilité P. On sait que : • A et B sont indépendants ; • $P(\text{A}) = \frac{2}{5}$; $P(\text{A} \cup \text{B}) = \frac{3}{4}$; • $P(\text{C}) = \frac{1}{2}$; $P(\text{A} \cap \text{C}) = \frac{1}{10}$.	Proposition 3 $P(\text{B}) = \frac{7}{12}$	Proposition 4 $P\left(\overline{\text{A} \cup \text{C}}\right) = \frac{2}{5}$. $\overline{\text{A} \cup \text{C}}$ désigne l'évènement contraire de $\text{A} \cup \text{C}$.
Question C Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où n est égal à 4 et p appartient à $]0\,;1[$.	Proposition 5 Si $P(X=1) = 8P(X=0)$ alors $p = \frac{2}{3}$.	Proposition 6 Si $p = \frac{1}{5}$ alors $P(X=1) = P(X=0)$.
Question D La durée de vie, exprimée en années, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$ sur $[0\,;\,+\infty[$. On rappelle que pour tout $t > 0$, la probabilité de l'évènement $(X \leqslant t)$ est donnée par : $P(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ (avec $\lambda = 0,07$).	Proposition 7 La probabilité que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à $0,5$ à 10^{-2} près.	Proposition 8 Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 10 ans est égale à $0,5$ à 10^{-2} près.

3 Nombres complexes

Exercice 20 (Antilles-Guyane, septembre 2006, 5 points)
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On désigne par A et B les point, d'affixes respectives 2 et 3. On fera un dessin (unité graphique 2 cm) qui sera complété selon indications de l'énoncé.
La question 1 *est indépendante des questions* 2 *et* 3.

1) **a)** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation

$$z^2 - 4z + 6 = 0.$$

b) On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives

$$z_1 = 2 + i\sqrt{2} \text{ et } z_2 = 2 - i\sqrt{2}.$$

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{z_1 - 3}{z_1}$.
En déduire que le triangle OBM_1 est un triangle rectangle.

c) Démontrer sans nouveau calcul que les points O, B, M_1 et M_2, appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ que l'on précisera.
Tracer le cercle $\mathcal{C}$ et placer les points M_1 et M_2 sur le dessin.

2) On appelle f l'application du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par l'égalité $z' = z^2 - 4z + 6$.
On désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
Ce cercle ne sera pas tracé sur le dessin,

a) Vérifier l'égalité suivante $z' - 2 = (z - 2)^2$.

b) Soit M le point de Γ d'affixe $z = 2 + \sqrt{2}e^{i\theta}$ où θ désigne un réel de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
Vérifier l'égalité suivante : $z' = 2 + 2e^{2i\theta}$ et en déduire que M' est situé sur un cercle Γ' dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ' sur le dessin,

3) On appelle D le point d'affixe $d = 2 + \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{6}}{2}$ et on désigne par D′ l'image de D par f.

a) Écrire sous forme exponentielle le nombre complexe $d - 2$.
En déduire que D est situé sur le cercle Γ.

b) À l'aide la question 2 b, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{AD'}\right)$ et placer le point D′ sur le dessin.

c) Démontrer que le triangle OAD′ est équilatéral.

Exercice 21 (Amérique du Nord, juin 2008, 5 points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$unité graphique : 4 cm.
On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1) Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.

2) **a)** Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O\ ;\ \overrightarrow{u})$.

b) On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.
Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ).

3) Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5}+\frac{6}{5}\mathrm{i}$.

a) Calculer le nombre complexe $\frac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{M}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{M}}}$.

b) Interpréter géométriquement un argument du nombre $\frac{z_{\mathrm{D}}-z_{\mathrm{M}}}{z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{M}}}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ).

4) On note (Γ') le cercle de diamètre [AB].
La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

a) Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.

b) Déterminer l'affixe du point N.

5) On désigne par M′ l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'affixe du point M′.

b) Montrer que le point M′ appartient au cercle (Γ').

Exercice 22 (Amérique du Sud, septembre 2009, 5 points)
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2}.$$

1) **a)** Déterminer l'affixe du point P′ image par f du point P d'affixe $(1+\mathrm{i})$.

b) Montrer que les droites (AP) et (BP′) sont parallèles.

c) Établir que les droites (AP) et (PP′) sont perpendiculaires.

2) Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que M'=M).

On cherche à généraliser les propriétés **1.b** et **1.c** pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3) **a)** Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.

b) En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\frac{z'+2}{z-2}$ est réel.

c) Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB). Généraliser les résultats de la question **1.c**.

5) Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3-2\mathrm{i}$.

Exercice 23 (Nouvelle Calédonie, septembre 2009, 5 points)
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ d'unité graphique 2 cm. On considère les points A et B d' affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = 1+\mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = 2\mathrm{i}$.

1) **a)** Écrire z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

b) Placer les points A et B sur une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

c) Déterminer la nature du triangle OAB.

2) On note r la rotation de centre O qui transforme A en B. Pour tout point M d' affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe du point M'.

a) Calculer un argument du quotient $\dfrac{z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{A}}}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

b) En déduire l'écriture complexe de la rotation r.

3) Soient Γ le cercle de centre A passant par O et Γ' le cercle de centre B passant par O.
Soit C le deuxième point d'intersection de Γ et Γ' (autre que O). On note z_{C} son affixe.

a) Justifier que le cercle Γ' est l'image du cercle Γ par la rotation r.

b) Calculer l'affixe z_{I} du milieu I de [AB].

c) Déterminer la nature du quadrilatère OACB.

d) En déduire que I est le milieu de [OC] puis montrer que l'affixe de C est :

$$z_{\mathrm{C}} = 1 + \left(2 + \sqrt{3}\right)\mathrm{i}.$$

4) Soit D le point d'affixe $z_{\mathrm{D}} = 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

a) Justifier que le point D appartient au cercle Γ. Placer D sur la figure.

b) Placer D′ image de D par la rotation r définie à la question 2.
On note $z_{\mathrm{D}'}$ l'affixe de D′.
Montrer que $z_{\mathrm{D}'} = -\sqrt{3} + 3\mathrm{i}$.

5) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{DD'}}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire ?

Exercice 24 (Polynésie, septembre 2009, 5 points)

Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique : 2 cm.
On appelle (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1.
On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.
On appelle F l'application du plan P privé du point O dans P qui, à tout point M différent de O, d'affixe z, associe le point $M' = F(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = z + \mathrm{i} - \frac{1}{z}.$$

1) On considère les points A et B d'affixes respectives $a = \mathrm{i}$ et $b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et leurs images A′ et B′ par F d'affixes respectives a' et b'.

a) Calculer a' et b'.

b) Placer les points A, A′ B et B′.

c) Démontrer que $\dfrac{-b}{b'-b} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$.

d) En déduire la nature du triangle OBB′.

2) On recherche l'ensemble (E) des points du plan P privé du point O qui ont pour image par F, le point O.

a) Démontrer que, pour tout nombre complexe z,

$$z^2 + \mathrm{i}z - 1 = \left(z + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\left(z - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right).$$

b) En déduire les affixes des points de l'ensemble (E).

c) Démontrer que les points de (E) appartiennent à (Γ).

3) Soit θ un réel.

a) Démontrer que si $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ alors $z' = (2\sin\theta + 1)\mathrm{i}$.

b) En déduire que si M appartient au cercle (Γ) alors M' appartient au segment [A′C] où C a pour affixe $-\mathrm{i}$.

Exercice 25 (Antilles-Guyane, septembre 2009, 5 points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm. Faire une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

1) Placer les points A, B et C d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = -11 + 4\mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = -3 - 4\mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{C}} = 5 + 4\mathrm{i}.$$

2) Calculer le module et un argument du quotient $\dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{C}} - z_{\mathrm{B}}}$ et en déduire la nature du triangle ABC.

3) Soit E l'image du point C par la rotation $\mathcal{R}$ de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

Montrer que l'affixe de E vérifie $z_{\mathrm{E}} = -3 + \left(8\sqrt{2} - 4\right)\mathrm{i}$.

Placer le point E.

4) Soit D l'image du point E par l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre B et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrer que D est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Placer le point D .

5) **Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**

Soit $\mathscr{D}$ la droite parallèle à la droite (EC) passant par le point D. On note F le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et de la droite (BC), I le milieu du segment [EC] et J le milieu du segment [DF].

Montrer que B, I et J sont alignés.

Exercice 26 (Liban, juin 2009, 5 points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}} \text{ et } z_{\mathrm{C}} = -3.$$

Partie A

1) Écrire les nombres complexes z_{A} et z_{B} sous forme exponentielle.

2) Placer les points A, B et C.

3) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'aflixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{1}{3}\mathrm{i}z^2$.
On note O′, A′, B′ et C′ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1) **a)** Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A′, B′ et C′.

b) Placer les points A′, B′ et C′ .

c) Démontrer l'alignement des points O, A et B′ ainsi que celui des points O, B et A′.

2) Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G′ le point associé à G par f.

a) Déterminer les affixes des points G et G′.

b) Le point G′ est-il l'isobarycentre des points O′ A′, B′ et C′ ?

3) Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

Exercice 27 (Pondichéry, juin 2006, 5 points)
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1+\mathrm{i}}{2}z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1) Calculer z_1, z_2, z_3, z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.
Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

3) À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

4) **a)** Établir que, pour tout entier naturel n, $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \mathrm{i}$.
En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.

b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$.
On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n$.
Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

---

4 Géométrie dans l'espace

Exercice 28 (Pondichéry, avril 2010, 5 points)
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une dé monstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1) La droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t+2 \\ y = -2t \\ z = 3t-1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ est parallèle au plan dont une équation cartésienne est : $x + 2y + z - 3 = 0$.

2) Les plans P, P', P'' d'équations respectives $x-2y+3z=3$, $2x+3y-2z=6$ et $4x-y+4z=12$ n'ont pas de point commun.

3) Les droites de représentations paramétriques respectives
$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 2-3t \\ y &=& 1+t \\ z &=& -3+2t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$ et $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 7+2u \\ y &=& 2+2u \\ z &=& -6-u \end{array}\right.$, $u \in \mathbb{R}$ sont sécantes.

4) On considère les points :
A, de coordonnées $(-1\,;\,0\,;\,2)$, B, de coordonnées $(1\,;\,4\,;\,0)$, et C, de coordonnées $(3\,;\,-4\,;\,-2)$.
Le plan (ABC) a pour équation $x+z=1$.

5) On considère les points :
A, de coordonnées $(-1\,;\,1\,;\,3)$, B, de coordonnées $(2\,;\,1\,;\,0)$, et C, de coordonnées $(4\,;\,-1\,;\,5)$.
On peut écrire C comme barycentre des points A et B.

Exercice 29 (Amérique du Nord, juin 2008, 5 points)
Partie A
On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment [AD].

1) Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{\mathrm{MD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}} = \mathrm{MI}^2 - \mathrm{IA}^2$.

2) En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{\mathrm{MD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{MA}} = 0$.

Partie B :
Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives :

$$\mathrm{A}(3\,;\,0\,;\,0),\ \mathrm{B}(0\,;\,6\,;\,0), \mathrm{C}(0\,;\,0\,;\,4) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}(-5\,;\,0\,;\,1).$$

1) **a)** Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

b) Déterminer une équation du plan (ABC).

2) **a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ, orthogonale au plan (ABC) passant par D.

b) En déduire les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

c) Calculer la distance du point D au plan (ABC).

d) Démontrer que le point H appartient l'ensemble (E) défini dans la partie A.

Exercice 30 (Pondichéry, juin 2007, 4 points)
L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.
On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x+y-2z+4=0$ et les points A de coordonnées $(3\,;2\,;6)$, B de coordonnées $(1\,;2\,;4)$, et C de coordonnées $(4\,;\,-2\,;\,5)$.

1) **a)** Vérifier que les points A, B et C définissent un plan.

b) Vérifier que ce plan est le plan $\mathcal{P}$.

2) **a)** Montrer que le triangle ABC est rectangle.

b) Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par O et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

c) Soit K le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P}$. Calculer la distance OK.

d) Calculer le volume du tétraèdre OABC.

3) On considère, dans cette question, le système de points pondérés

$$S = \{(\mathrm{O},\ 3),\ (\mathrm{A},\ 1),\ (\mathrm{B},\ 1),\ (\mathrm{C},\ 1)\}$$

a) Vérifier que ce système admet un barycentre, qu'on notera G.

b) On note I le centre de gravité du triangle ABC. Montrer que G appartient à (OI).

c) Déterminer la distance de G au plan $\mathcal{P}$.

4) Soit Γ l'ensemble des points M de l'espace vérifiant :

$$\left\| 3\overrightarrow{M\mathrm{O}} + \overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} \right\| = 5.$$

Déterminer Γ. Quelle est la nature de l'ensemble des points communs à $\mathcal{P}$ et Γ ?

Exercice 31 (Asie, juin 2008, 4 points)
A -Vrai ou faux ?
Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exempte.
Rappel des notations :

- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ *désigne l'ensemble des points communs aux plans* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$.
- *L 'écriture* $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ *signifie que les plans* $\mathcal{P}_1$ *et* $\mathcal{P}_2$ *n'ont aucun point commun.*

1) Si $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

2) Si $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont tels que : $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$ et $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$.

3) Si $\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ vérifient : $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 \neq \emptyset$.

4) Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace vérifiant :

$$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathcal{P}_2 \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$

B - Intersection de trois plans donnés
Dans un repère orthonorrnal de l'espace on considère les trois plans suivants :

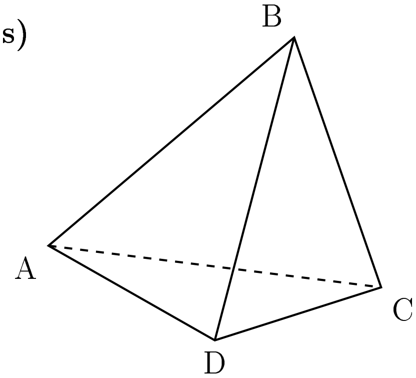
- $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y - z = 0$
- $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,
- $\mathcal{P}_3$ d'équation $x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1) Justifier que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'interseclion, notée Δ.

2) En déduire la nature de l'intersection $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$.

Exercice 32 (Pondichéry, juin 2008, 4 points)

On considère un tétraèdre $ABCD$.
On note $I,\ J,\ K,\ L,\ M,\ N$ les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.
On désigne par G l'isobarycentre des points $A,\ B,\ C$ et D.



1) Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.
Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2) **a)** Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3) **a)** Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c) Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

Exercice 33 (Amérique du Sud, septembre 2009, 6 points)
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On prend 1 cm comme unité.
Partie A — Restitution organisée de connaissances
Soit D le point de coordonnées $(x_{\mathrm{D}},\ y_{\mathrm{D}},\ z_{\mathrm{D}})$ et P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où a, b et c sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par :

$$d(\mathrm{D}, P) = \frac{|ax_{\mathrm{D}} + by_{\mathrm{D}} + cz_{\mathrm{D}} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Partie B
On considère les points A de coordonnées $(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$, B de coordonnées $(6\ ;\ -2\ ;\ -1)$, C de coordonnées $(6\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et D de coordonnées $(4\ ;\ 0\ ;\ -1)$.

1) Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC.

2) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(1\ ;\ -2\ ;\ 1)$ est normal au plan (ABC).
Déterminer une équation du plan (ABC).

3) Calculer la distance du point D au plan (ABC).
Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

1) Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC).

2) Q coupe les droites (DA), (DB) et (DC) respectivement en E, F et G.
Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment [DA].

3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer le volume du tétraèdre EFGD.

Exercice 34 (Nouvelle Calédonie, septembre 2009, 5 points)

L'espace est rapporté au repère orthononnal $\left(\text{A} ~;~ \overrightarrow{\text{AB}},~ \overrightarrow{\text{AD}},~ \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

On considère le cube ABCDEFGH représenté sur l'annexe, à rendre avec la copie.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [BF] et [HF].

1) Déterminer les coordonnées des points I, J et K.

2) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{n}(2~;~1~;~1)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\text{IK}}$ et à $\overrightarrow{\text{IJ}}$.
En déduire qu'une équation du plan (IJK) est : $4x + 2y + 2z - 5 = 0$.

3) **a)** Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite (CD).

b) En déduire que le point d'intersection R du plan (IJK) et de la droite (CD) est le point de coordonnées $\left(\dfrac{3}{4}~;~1~;~0\right)$.

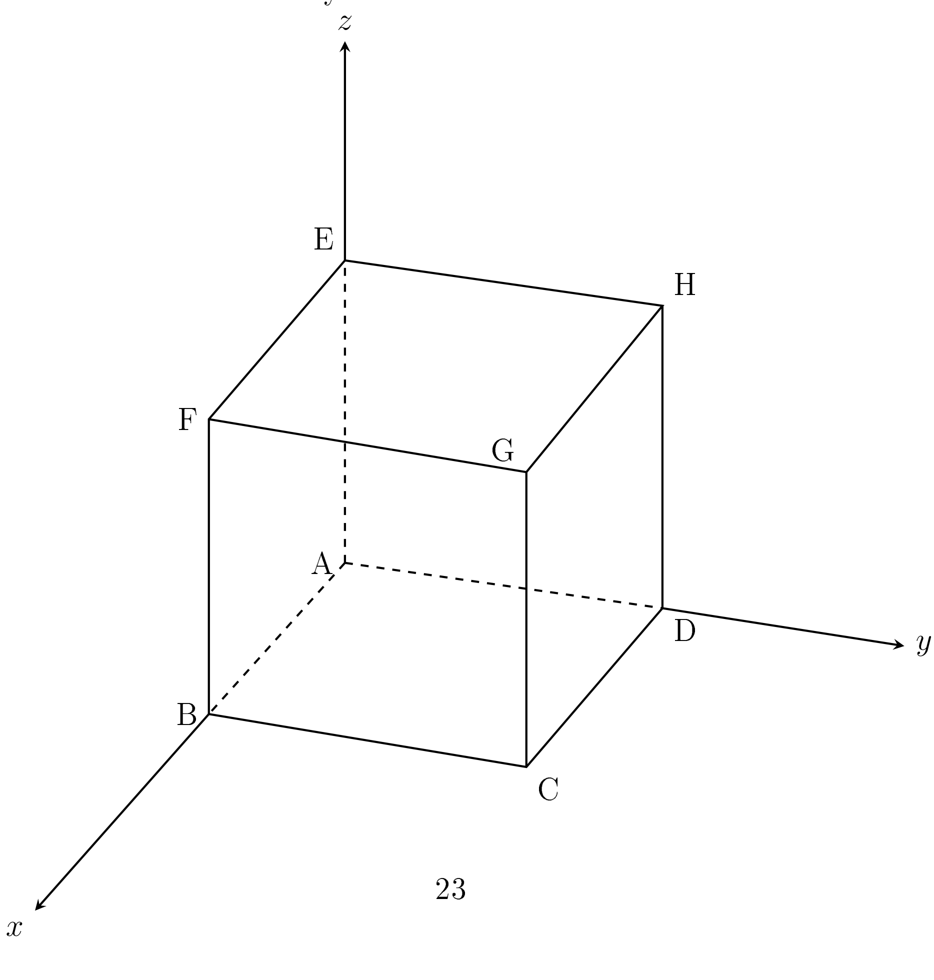
c) Placer le point R sur la figure.

4) Tracer sur la figure la section du cube par le plan (IJK). On peut répondre à cette question sans avoir traité les précédentes.

5) **a)** Montrer que la distance du point G au plan (IJK) est $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

b) Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre G passant par F. Justifier que la sphère $\mathscr{S}$ et le plan (IJK) sont sécants. Déterminer le rayon de leur intersection.

Annexe :



Exercice 35 (France métropolitaine, septembre 2009, 5 points)
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1) On désigne par $\mathscr{P}$ le plan d'équation $x+y-1=0$ et par $\mathscr{P}'$ le plan d'équation $y+z-2=0$. Justifier que les plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants et vérifier que leur intersection est la droite $\mathscr{D}$, dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2-t \end{cases}$, où t désigne un nombre réel.

2) **a)** Déterminer une équation du plan $\mathscr{R}$ passant par le point O et orthogonal à la droite $\mathscr{D}$.

b) Démontrer que le point I, intersection du plan $\mathscr{R}$ et de la droite $\mathscr{D}$, a pour coordonnées $(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

3) Soient A et B les points de coordonnées respectives $\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ et $(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

a) Vérifier que les points A et B appartiennent au plan $\mathscr{R}$.

b) On appelle A$'$ et B$'$ les points symétriques respectifs des points A et B par rapport au point I.
Justifier que le quadrilatère ABA' B' est un losange.

c) Vérifier que le point S de coordonnées $(2\ ;\ -1\ ;\ 3)$ appartient à la droite $\mathscr{D}$.

d) Calculer le volume de la pyramide SABA$'$B$'$.

On rappelle que le volume V d'une pyramide de base d'aire b et de hauteur h est : $V = \dfrac{1}{3}b \times h$.

Exercice 36 (Antilles-Guyane, septembre 2009, 5 points)
L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les points $A(1\ ;\ -1\ ;\ 4)$, $B(7\ ;\ -1\ ;\ -2)$ et $C(1\ ;\ 5\ ;\ -2)$.

1) **a)** Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

c) Montrer que le vecteur $\vec{n}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

d) En déduire que $x+y+z-4=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Soit $\mathscr{D}$ la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x &= -2t \\ y &= -2t-2 \quad \text{où} \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= -2t-3 \end{cases}$$

a) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ est perpendiculaire au plan (ABC).

b) Montrer que les coordonnées du point G, intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan (ABC) sont $(3\ ;\ 1\ ;\ 0)$.

c) Montrer que G est l'isobarycentre des points A, B et C.

3) Soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre G passant par A.

a) Donner une équation cartésienne de la sphère $\mathscr{S}$.

b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection E et F, de la droite $\mathscr{D}$ et de la sphère $\mathscr{S}$.