



Exercice 1

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C.

À l'instant 0, la puce est en A.

Pour tout entier naturel n :

- si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est :

soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$;

soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$.

- si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n + 1)$, elle est :

soit en C, soit en A de façon équiprobable

- si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C).

On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'évènement A_n , (respectivement B_n, C_n).

On a donc : $a_0 = 1, b_0 = c_0 = 0$.

Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1) Calculer a_k, b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \leq k \leq 3$.

2) a. Montrer que, pour tout entier naturel $n, a_n + b_n + c_n = 1$ et

$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n \end{cases}$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n, a_{n+2} = \frac{1}{6}a_n$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel $p,$

$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} & b_{2p+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$$

3) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 2

Pierre et Claude jouent au tennis. Les deux joueurs ont la même chance de gagner la première partie. Par la suite, lorsque Pierre gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,7. Et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,8.

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul. On considère les évènements :

- G_n : « Pierre gagne la n -ième partie ».
- P_n : « Pierre perd la n -ième partie ».

On pose : $p_n = p(G_n)$ et $q_n = p(P_n)$.

1) Recherche d'une relation de récurrence.

- a. Déterminer p_1 puis les probabilités conditionnelles $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{P_1}(G_2)$.
 - b. Justifier l'égalité $p_n + q_n = 1$.
 - c. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,2$.
- 2) Étude de la suite (p_n) .
- On pose, pour tout entier naturel n non nul, $v_n = p_n - \frac{2}{5}$.
- a. Prouver que la suite (v_n) est une suite géométrique et exprimer v_n en fonction de n .
 - b. En déduire l'expression de p_n en fonction de n .
 - c. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3

Pour les questions 1 et 2, on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à 10^{-3} près.

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

- 1) Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.
 - a. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - b. Calculer l'espérance mathématique de X .
- 2) Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les événements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,
 C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,
 R : « L'enfant prend une bille rouge »,
 V : « L'enfant prend une bille verte ».

 - a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.
 - b. Calculer la probabilité de l'évènement R.
 - c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?
- 3) L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.
 - a. Exprimer, en fonction de n , la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.
 - b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,99$.