

6 Spécialité

Exercice 1

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

- 1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère la similitude directe f d'écriture complexe

$$z \mapsto \frac{3}{2}(1 - i)z + 4 - 2i.$$

Proposition 1 : « $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2 - 2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ ».

- 2) Pour tout entier naturel n non nul :

Proposition 2 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5 ».

Proposition 3 : « $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7 ».

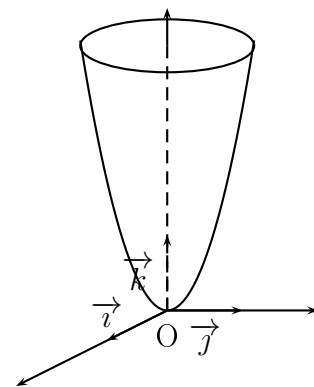
- 3) Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.

Proposition 4 : « les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14; 11k + 28)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

- 4) L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

La surface Σ ci-contre a pour équation

$$z = x^2 + y^2.$$



Proposition 5 : « la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole ».

Proposition 6 : « le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume ».

Rappel : Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leq a \leq b \leq 9$.

V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k) dk$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a; b]$.