

## 6 Spécialité

### Exercice 1

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

- 1) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère la similitude directe  $f$  d'écriture complexe

$$z \mapsto \frac{3}{2}(1 - i)z + 4 - 2i.$$

**Proposition 1** : «  $f = r \circ h$  où  $h$  est l'homothétie de rapport  $3\frac{\sqrt{2}}{2}$  et de centre le point  $\Omega$  d'affixe  $-2 - 2i$  et où  $r$  est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$  ».

- 2) Pour tout entier naturel  $n$  non nul :

**Proposition 2** : «  $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$  est divisible par 5 ».

**Proposition 3** : «  $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$  est divisible par 7 ».

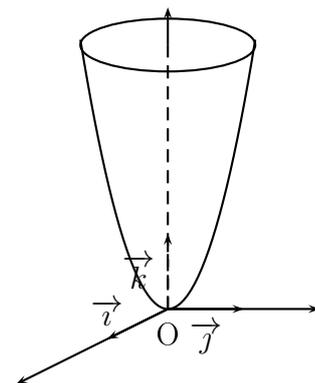
- 3) Dans le plan muni d'un repère,  $(D)$  est la droite d'équation  $11x - 5y = 14$ .

**Proposition 4** : « les points de  $(D)$  à coordonnées entières sont les points de coordonnées  $(5k + 14; 11k + 28)$  où  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 4) L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

La surface  $\Sigma$  ci-contre a pour équation

$$z = x^2 + y^2.$$



**Proposition 5** : « la section de la surface  $\Sigma$  et du plan d'équation  $x = \lambda$ , où  $\lambda$  est un réel, est une hyperbole ».

**Proposition 6** : « le plan d'équation  $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$  partage le solide délimité par  $\Sigma$  et le plan d'équation  $z = 9$  en deux solides de même volume ».

*Rappel* : Soit  $V$  le volume du solide délimité par  $\Sigma$  et les plans d'équations  $z = a$  et  $z = b$  où  $0 \leq a \leq b \leq 9$ .

$V$  est donné par la formule  $V = \int_a^b S(k) dk$  où  $S(k)$  est l'aire de la section du solide par le plan d'équation  $z = k$  où  $k \in [a; b]$ .