Exercices : Limites et continuité

Correction.

Exercice 4

Soit $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 3x + 5}{x + 2}$

1) La fonction f n'est pas définie que lorsque le dénominateur $x+2$ est nul. C'est-à-dire $x = -2$. Donc $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}.}$

2) Limites aux bornes de $\mathscr{D}_f$.

En $-\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} -2x = +\infty.$

En -2^- : $\displaystyle\lim_{x\to-2^-} f(x) = 3 \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x+2} = 3 \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$

En -2^+ : $\displaystyle\lim_{x\to-2^+} f(x) = 3 \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x+2} = 3 \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$

En $+\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^2}{x} = -\infty.$

3) Soit a, b, c des réels tels que, pour tout $x \neq -2$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$. Pour tout $x \neq -2$,

$$ax+b+\frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2} = \frac{(a)x^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2}$$

On identifie les coefficients du numérateur, puis on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ 2a+b & = & -3 \\ 2b+c & = & 5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2 \\ b & = & -3-2a = -3+4 = 1 \\ c & = & 5-2b = 5-2 = 3 \end{array}\right.$$

Donc $\boxed{f(x) = -2x + 1 + \dfrac{3}{x+2}.}$

4) Asymptotes.

- Au voisinage de -2, la fonction f admet des limites infinies à gauche et à droite. Donc $\boxed{f \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = -2.}$
- D'après le résultat de la question 3,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-2x+1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x+2} = 0$$

Donc $\boxed{f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y = -2x+1 \text{ au voisinage de } +\infty.}$
Le raisonnement est identique au voisinage de $-\infty$, par conséquent
$\boxed{f \text{ admet une asymptote oblique d'équation } y = -2x+1 \text{ au voisinage de } -\infty.}$

5) Pour tout $x \neq -2$, $f(x) + 2x - 1 = \dfrac{3}{x+2}$. Ainsi

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	
$f(x)+2x-1$		$-$	$\Vert$	$+$	

Ce qui signifie graphiquement que la courbe est sous l'asymptote oblique sur l'intervalle $]-\infty;-2[$ et au-dessus de l'asymptote sur l'intervalle $]-2;+\infty[$.

6) Calculons la dérivée de f en utilisant la forme trouvée à la question 3. Soit $x \neq -2$,

$$f'(x) = -2 - \frac{3}{(x+2)^2}$$

Or $(x+2)^2 > 0$ pour $\neq -2$, donc $-\dfrac{3}{(x+2)^2} < 0$ et finalement $f'(x) < 0$. La fonction f est donc décroissante *sur chacun des intervalles de l'ensemble de définition* :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$+\infty$		$\Vert$ $+\infty$		
		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	
			$-\infty$ $\Vert$		$-\infty$

Exercice 5

Calcul détaillé de la limite de $f(x) = \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-x}$ au voisinage de $+\infty$. Voir l'exercice suivant pour le calcul de l'ensemble de définition (il n'y a pas de problème au voisinage de $+\infty$).

Analyse du problème : en essayant de calculer « directement » la limite, sans changer la forme de f, on trouve une forme indéterminée (« $\infty - \infty$ »).

Rédaction de la solution (en italique les remarques) :

Soit $x \in \mathscr{D}_f$. $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x} \geq \sqrt{2} + \sqrt{x^2-x} \geq 2 > 0$ donc n'est jamais nul[1],

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-x} \\
&= \frac{(\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}} \\
&= \frac{(x^2+2) - (x^2-x)}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}} && \text{(Identité remarquable } (a-b)(a+b) = a^2 - b^2\text{)} \\
&= \frac{2+x}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}}
\end{aligned}$$

Si l'on essaye de calculer la limite, on trouve encore une forme indéterminée (« $\dfrac{\infty}{\infty}$ »). On s'inspire de la démarche dans le cas d'un fraction rationnelle.

On suppose de plus $x \neq 0$, $f(x)$ peut alors s'écrire

$$f(x) = \frac{2+x}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}} = \frac{x\left(\frac{2}{x}+1\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}} = \frac{x\left(\frac{2}{x}+1\right)}{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{x}{\sqrt{x^2}}u(x)$$

Avec $u(x) = \dfrac{\frac{2}{x}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}}$. De plus, on remarque que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Déterminons les limites en $+\infty$ de chacun des membres :

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} + 1 = 0 + 1 = 1$
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{2}{x^2} = 1 + 0 = 1$ et $\displaystyle\lim_{y\to 1} \sqrt{y} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{2}{x^2}} = 1$.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 - 0 = 1$ et, de même, $\displaystyle\lim_{y\to 1} \sqrt{y} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 1$.
- Conclusion : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

[1] on peut diviser par $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-x}$ en tout quiétude.

- Pour tout $x > 0$, $|x| = x$, donc $\dfrac{x}{|x|} = \dfrac{x}{x} = 1$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$.

En conclusion
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{|x|}\right) \times \left(\lim_{x\to+\infty} u(x)\right) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercice 6

1) La fraction est définie si et seulement si son dénominateur est différent de 0, c'est-à-dire pour x tel que $-x^2 + 3x - 2 \neq 0$. Résolvons $-x^2 + 3x - 2 = 0$.
$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-1)(-2) = 9 - 8 = 1$$
Donc $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+1}{-2} = \dfrac{-2}{-2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-3-1}{-2} = 2$. Ainsi $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{1;2\}.}$

2) La fraction est définie si et seulement si son dénominateur est différent de 0, c'est-à-dire pour x tel que $x^2 \neq 0$. Le résultat est immédiat : $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}^*.}$

3) La fraction est définie si et seulement si son dénominateur est différent de 0, c'est-à-dire pour x tel que $(x+1)(x-2) \neq 0$. Le dénominateur étant déjà factorisé, on trouve : $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{-1;2\}.}$

4) La fonction est définie lorsque les termes à l'intérieur des racines sont positifs ou nuls. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 2 \geq 0$, et la première racine est définie sur $\mathbb{R}$. Pour la seconde racine, il faut étudier le signe de $x^2 - x = x(x-1)$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$+$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $x^2 - x \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty;0] \cup [1;+\infty[$, et $\boxed{\mathscr{D}_f =]-\infty;0] \cup [1;+\infty[.}$

5) La fonction est définie lorsque les termes à l'intérieur des racines sont positifs ou nuls. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$, donc $4x^2 + 1 \geq 0$, et $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R}.}$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2}$.

1) Pour tout réel x, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$.
Donc, pour tout réel $x \neq 0$, $-\dfrac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$.

2) On a
$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \quad -\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$$
Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut 0.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x+\sin(x)}{x-1}$.

1) On encadre le sinus entre -1 et 1, et ça marche.

2) Théorème des gendarmes.

Exercice 9

Dans chacun des cas suivants, étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

1) Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ ne posent pas problème. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Nous allons composer les limites : pour tout $x \neq 0$, posons $u(x) = \dfrac{1}{x}$, c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{u(x)}$.
Alors, pour tout $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cos(u(x)) = g(u(x))$ avec $g(x) = \dfrac{1}{x} \cos x$. De plus

$$\lim_{x\to 0^+} u(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

Cette dernière limite s'obtenant par le théorème des gendarme (voir l'exemple du cours). Le théorème de composition des limites nous dit alors que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2) Vu en cours.

Exercice 11 (Vrai / Faux)
Pour chaque affirmation, on demande une justification (contre-exemple ou preuve). Il peut être utile, pour aider à la réflexion, de chercher des exemples graphiquement.
Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$.

1) Faux.

2) Faux.

3) Vrai.

4) Faux.