Exercices : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 (Amérique du Nord, juin 2009, 5 points)
On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.
On note I le centre de la face ADHE, J celui de la face ABCD et K le milieu du segment [IJ].
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Déterminer les coordonnées des points l, J et K dans ce repère.

2) Démontrer que les points A, K et G ne sont pas alignés.

3) **a)** Démontrer que le plan médiateur du segment [IJ] est le plan (AKG).

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (AKG).

c) Vérifier que le point D appartient au plan (AKG).

4) Dans cette question, on veut exprimer K comme barycentre des points A, D et G.
Soit L le centre du carré DCGH.

a) Démontrer que le point K est le milieu du segment [AL].

b) *Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Démontrer que K est le barycentre des points A. D et G affectés de coefficients que l'on précisera.

Exercice 2 (Pondichéry, avril 2008, 4 points)
On considère un tétraèdre $ABCD$.
On note I, J, K, L, M, N les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[BC]$, $[AD]$, $[AC]$ et $[BD]$.
On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C et D.

1) Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$.
(On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2) **a)** Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3) **a)** Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

b) Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

c) Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

d) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?

Exercice 3 (Pondichéry, avril 2009, 4 points)
Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ on considère les points :
A de coordonnées $(1; 1; 0)$, B de coordonnées $(2; 0; 3)$, C de coordonnées $(0; -2; 5)$ et D de coordonnées $(1; -5; 5)$.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est **vraie** ou **fausse** en justifiant chaque fois la réponse :

Proposition 1 : L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $y = 2x + 4$ est une droite.

Proposition 2 : La transformation qui, à tout point M de l'espace associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$ est l'homothétie de centre G, où G désigne le barycentre du système $\{(A, 1),\ (B, 1), (C, 2)\}$, et de rapport 3.

Proposition 3 : A, B, C et D sont quatre points coplanaires.

Proposition 4 : La sphère de centre Ω de coordonnées (3, 3, 0) et de rayon 5 est tangente au plan d'équation : $2x + 2y + z + 3 = 0$.

Exercice 4 (Polynésie, juin 2009, 5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

On considère les points : $\mathrm{A}(1; -1; 3)$, $\mathrm{B}(0; 3; 1)$, $\mathrm{C}(6; -7; -1)$, $\mathrm{D}(2; 1; 3)$ et $\mathrm{E}(4; -6; 2)$.

1) **a)** Montrer que le barycentre du système $\{(A, 2), (B, -1), (C, 1)\}$ est le point E.

b) En déduire l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 2\sqrt{21}.$$

2) **a)** Montrer que les points A, B et D définissent un plan.

b) Montrer que la droite (EC) est orthogonale au plan (ABD).

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABD).

3) **a)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b) Déterminer les coordonnées du point F intersection de la droite (EC) et du plan (ABD).

4) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*

Montrer que le plan (ABD) et l'ensemble Γ, déterminé à la question 1., sont sécants. Préciser les éléments caractéristiques de cette intersection.

Exercice 5 (France, septembre 2008, 4 points)

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, ABCD est un carré direct $\left(\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\right)$. On note I son centre et J le milieu de [AI].

1) C est le barycentre des points pondérés (A, m), (B, 1) et (D, 1) lorsque :

a. $m = -2$ **b.** $m = 2$ **c.** $m = -1$ **d.** $m = 3$

2) **a)** B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

b) Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\dfrac{2}{3}$.

c) Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I.

d) J est l'image de I par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

3) L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = AB$ est :

a) la médiatrice de [AC].

b) le cercle circonscrit au carré ABCD.

c) la médiatrice de [AI].

d) le cercle inscrit dans le carré ABCD.

4) L'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}\right)=0$$

est :

a) la médiatrice de [AC].

b) le cercle circonscrit au carré ABCD.

c) la médiatrice de [AI].

d) le cercle inscrit dans le carré ABCD.

Exercice 6 (Liban, juin 2009, 5 points)
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_A=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad z_B=\overline{z_A}\quad\text{et}\quad z_C=-3.$$

Partie A

1) Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.

2) Placer les points A, B et C.

3) Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'aflixe z, associe le point M' d'affixe $z'=\frac{1}{3}iz^2$.
On note O$'$, A$'$, B$'$ et C$'$ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1) **a)** Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A$'$, B$'$ et C$'$.

b) Placer les points A$'$, B$'$ et C$'$.

c) Démontrer l'alignement des points O, A et B$'$ ainsi que celui des points O, B et A$'$.

2) Soit G l'isobarycentre des points O, A, B et C. On note G$'$ le point associé à G par f.

a) Déterminer les affixes des points G et G$'$.

b) Le point G$'$ est-il l'isobarycentre des points O$'$ A$'$, B$'$ et C$'$?

3) Démontrer que si M appartient à la droite (AB) alors M' appartient à la parabole d'équation $y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{3}{4}$. (On ne demande pas de tracer cette parabole)

Exercice 7 (Antilles-Guyane, juin 2009, 5 points)
Dans chacun des cas suivants, indiquer si l'affirmation proposée est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Soit le point A d'affixe 3, le point B d'affixe $-4i$ et l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que $|z-3|=|z+4i|$.

Affirmation : $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On considère trois points A, B et C deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b et c, tels que $\dfrac{c-a}{b-a} = 2i$.

Affirmation : A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

3) On considère le nombre $z = 2e^{i\frac{\pi}{7}}$.

Affirmation : z^{2009} est un nombre réel positif.

4) On considère trois points A, B et C non alignés de l'espace. Le point G est le centre de gravité du trangle ABC.
On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des points M vérifiant $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$.

Affirmation : $\mathscr{F}$ est la sphère de centre de G et de rayon 2.

5) L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.
$\mathscr{S}$ est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.
$\mathscr{P}$ est le plan d'équation $x + y - 5 = 0$.

Affirmation : Le plan $\mathscr{P}$ coupe la sphère $\mathscr{S}$ suivant un cercle.

Exercice 8 (Asie, juin 2009, 4 points)

L'exercice comporte quatre questions indépendantes. Pour chacune d'entre elles, trois réponses sont proposées dont une seule est exacte. Il s'agit de déterminer la bonne réponse et de justifier le choix ainsi effectué.
Un choix non justifié ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1) La solution f de l'équation différentielle $y' + 2y = 6$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 1$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

a) $f(x) = -2e^{-2x} + 3$ **b)** $f(x) = -2e^{2x} + 3$ **c)** $f(x) = -2e^{-2x} - 3$

2) On considère un triangle ABC et on note I le point tel que $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$.
Les points G, I et A sont alignés lorsque G est le barycentre du système :

a) $\{(A,1),(C,2)\}$ **b)** $\{(A,1),(B,2),(C,2)\}$ **c)** $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$

3) Dans l'espace muni d'un repère orthononnal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$, on considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne : $x - 3y + 2z = 5$ et le point $\mathrm{A}(2;3;-1)$.
Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathscr{P}$ est le point :

a) $\mathrm{H}_1(3;-1;4)$ **b)** $\mathrm{H}_2(4;-3;-4)$ **c)** $\mathrm{H}_3(3;0;1)$

4) La valeur moyenne de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ est égale à :

a) $-\dfrac{\pi}{2}$ **b)** $\dfrac{\pi}{4}$ **c)** $\dfrac{\pi}{2}$