Exercices : Nombres complexes

Exercice 1 (Antilles-Guyane, septembre 2007)
Partie A

1) Déterminer le nombre complexe α tel que

$$\begin{cases} \alpha(1+i) &= 1+3i \\ i\alpha^2 &= -4+3i \end{cases}$$

2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose
$$f(z) = z^2 - (1+3i)z + (-4+3i)$$
Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-i\alpha)$. En déduire les solutions (sous forme algébrique) de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, unité graphique : 5 cm.

1) On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$a = 2+i \qquad \text{et} \qquad b = -1+2i$$

Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.
Montrer que $b = ia$ et en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

2) On considère le pont C d'affixe $c = -1 + \frac{1}{2}i$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3) Soit M le milieu du segment $[CB]$. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$. Prouver que $\dfrac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \frac{1}{2}i$.

4) Donner une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM})$.

5) Prouver que $OM = \frac{1}{2}DA$.

6) On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$.
On admet que le quadrilatère $JKLM$ est un parallélogramme, démontrer que c'est un carré.

Solution. Partie B

1) $ia = i(2+i) = 2i - 1 = -1+2i = b$. Ainsi $OB = |b| = |ia| = |i||a| = |a| = OA$. De plus $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \arg\left(\frac{b}{a}\right) = \arg\left(\frac{ia}{a}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. Donc OAB est isocèle rectangle en O.

2) En s'inspirant de la question précédente, considérons le point D d'affixe $d = ic = -\frac{1}{2} - i$. Alors, de même que ci-dessus,

$$OD = |d| = |c| = OC \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OD}) = \arg\left(\frac{d}{c}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Ainsi OCD est un triangle isocèle rectangle en O.

3) Calculons : M milieu de $[CB]$, donc

$$z_M = \frac{c+b}{2} = \frac{-1+i/2-1+2i}{2} = \frac{-2+5i/2}{2} = -1+\frac{5}{4}i$$

Ainsi, $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M - z_O = -1+\frac{5}{4}i$ et $z_{\overrightarrow{DA}} = a - d = 2+i+\frac{1}{2}+i = \frac{5}{2}+2i$. D'où

$$\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \frac{-1+\frac{5}{4}i}{\frac{5}{2}+2i} = \frac{-4+5i}{2(5+4i)} = \frac{(-4+5i)(5-4i)}{2(5+4i)(5-4i)} = \frac{-20+16i+25i+20}{2(25+16)} = \frac{41i}{2\times 41} = \frac{1}{2}i$$

(On peut procéder plus intelligemment, avec des mises en facteurs : $-4+5i = i(4i+5)$)

4) $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}}\right) = \arg\left(\frac{1}{2}i\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

5) $OM = \left|z_{\overrightarrow{OM}}\right| = \left|\frac{1}{2}i \times z_{\overrightarrow{DA}}\right| = \frac{1}{2}\left|z_{\overrightarrow{DA}}\right| = \frac{1}{2}DA$.

6)

□

Exercice 2 (Amérique du nord, juin 2006)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = 2, \quad z_B = 1+i\sqrt{3}, \quad z_C = 1-i\sqrt{3}$$

Partie A

1) **a.** Donner la forme trigonométrique de z_B puis z_C.

b. Placer les points A, B et C.

2) Déterminer la nature du quadrilatère $OBAC$.

3) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{D}$ des points M du plan tels que $|z| = |z-2|$.

Partie B

À tout point M d'affixe z tel que $z \neq z_A$, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{-4}{z-2}$.

1) **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z = \frac{-4}{z-2}$.

b. En déduire les points associés aux points B et C

c. Déterminer et placer le point G' associé au centre de gravité G du triangle OAB.

2) **a.** Question de cours : *le module d'un nombre complexe z quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$, où $\overline{z}$ est le conjugué de z.* Démontrer que

– Pour tout nombres complexes z_1 et z_2, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$;

– Pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

3) Démontrer que, pour tout nombre complexe z distinct de 2,

$$|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$$

4) On suppose dans cette question que M est un point quelconque de $\mathscr{D}$, où $\mathscr{D}$ est l'ensemble défini à la question 3 de la partie A.

Démontrer que le point M' associé à M appartient à un cercle Γ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer Γ.

Solution.

$\square$

Exercice 3 (Antilles-Guyane, juin 2007, partiel)

$(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. Soit A le point d'affixe $1+i$.
Au point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1}{2}(z + i\overline{z})$$

1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y' réels.

a. Démontrer les égalités suivantes

$$x' = \frac{1}{2}(x+y) \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{1}{2}(x+y)$$

En déduire que M' appartient à la droite (OA).

b. Déterminer l'ensemble des points M fixes du plan.

c. Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont orthogonaux.

Solution.

$\square$