Exercices : Nombres complexes

Attention : il peut y avoir des erreurs ou fautes de frappes : envoyez-moi un courrier électronique en cas de doute.

Exercice 1 (à savoir faire les yeux fermés)

1) $3 = 3(1+0i)$ donc $|3| = 3$ et $\arg(3) = 0[2\pi]$.

2) $1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ donc $|1-i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1-i) = -\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$.

3) $\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ module : $\sqrt{6}$, un argument : $\pi/4$.

4) $\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ module : 1, un argument : $\pi/3$.

5) $-\sqrt{5}$ module : $\sqrt{5}$, un argument : π.

6) $5\sqrt{3}-5i$ module : 10, un argument : -$\pi/6$.

7) $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$ module : 4, un argument : $-\pi/4$.

8) $5i$ module : 5, un argument : $\pi/2$.

9) $\dfrac{2\sqrt{3}}{7}-\dfrac{6}{7}i$ module : $4\sqrt{3}/7$, un argument : $-\pi/3$.

10) $\dfrac{-1+i}{3}$ module : $\sqrt{2}/3$, un argument : $3\pi/4$.

11) $-\dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\dfrac{1}{2}$ module : 1, un argument : $-5\pi/6$.

12) $i(\sqrt{2}+2)$ module : $\sqrt{2}+2$, un argument : $\pi/2$.

13) $-3-i\sqrt{3}$ module : $2\sqrt{3}$, un argument : $-5\pi/6$.

Exercice 2

Déterminer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

1) $|1+i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1+i) = \pi/4[2\pi]$ donc $(1+i)^3$ module $\sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2}$, un argument $3\pi/4$.

2) $|-1-i| = \sqrt{2}$ et $\arg(-1-i) = -3\pi/4[2\pi]$ donc $(-1-i)^5$ module $\sqrt{2}^5 = 4\sqrt{2}$, un argument $-15\pi/4 = -3\pi - 3\pi/4 = -\pi - 3\pi/4 = \pi - 3\pi/4 = \pi/4[2\pi]$ (après division euclidienne de 15 par 4).

3) $|\sqrt{5}+i\sqrt{5}| = \sqrt{10}$ et $\arg\left(\sqrt{5}+i\sqrt{5}\right) = \pi/4[2\pi]$ donc $(\sqrt{5}+i\sqrt{5})^8$ module $\sqrt{10}^8 = 10^4$, un argument $8\pi/4 = 2\pi = 0[2\pi]$.

4) $|\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\pi/3[2\pi]$ donc $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2009}$ module 1, un argument $-2009\pi/3 = -669\pi - 2\pi/3 = \pi - 2\pi/3 = \pi/3[2\pi]$ (après division euclidienne de 2009 par 3).

5) $|\sqrt{3}-i| = 2$ et $\arg\left(\sqrt{3}-i\right) = -\pi/6[2\pi]$ donc $(\sqrt{3}-i)^7$ module 2^7, un argument $-7\pi/6 = 5\pi/6[2\pi]$.

6) $|5\sqrt{3}-5i| = 10$ et $\arg\left(5\sqrt{3}-5i\right) = -\pi/6[2\pi]$ donc $(5\sqrt{3}-5i)^6$ module 10^6, un argument $-6\pi/6 = -\pi[2\pi]$.

7) $|5i| = 5$ et $\arg(5i) = \pi/2[2\pi]$ donc $(5i)^7$ module 5^7, un argument $7\pi/2 = -\pi/2[2\pi]$ (après division euclidienne et simplification).

8) $\left|\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{7}-\frac{6}{7}i}{-3-i\sqrt{3}}\right| = \dfrac{\left|\frac{2\sqrt{3}}{7}-\frac{6}{7}i\right|}{|-3-i\sqrt{3}|} = \dfrac{4\sqrt{3}/7}{2\sqrt{3}} = \dfrac{2}{7}$ et $\arg\left(\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{7}-\frac{6}{7}i}{-3-i\sqrt{3}}\right) = \arg\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{7}-\dfrac{6}{7}i\right)\arg\left(-3-i\sqrt{3}\right) = -\pi/3-5\pi/6 = 5\pi/6[2\pi]$.

9) $\left|\dfrac{3+3i}{-\sqrt{3}-i}\right| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ et $\arg\left(\dfrac{3+3i}{-\sqrt{3}-i}\right) = \pi/4-5\pi/6 = -7\pi/12[2\pi]$.

10) $\left|\dfrac{-1+i}{3i}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ et $\arg\left(\dfrac{-1+i}{3i}\right) = 3\pi/4-\pi/2 = \pi/4[2\pi]$.

On pouvait aussi remarquer que $\dfrac{-1+i}{3i} = \dfrac{-i(-1+i)}{3} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{i}{3}$.

Exercice 3

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1) $(1+i)^3 = 2\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)) = -2+2i$

2) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 = 1$

3) $(-\sqrt{5}-i\sqrt{5})^8 = 10^4$

4) $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{31} = \cos(-31\pi/3)+i\sin(-31\pi/3) = \cos(-\pi/3)+i\sin(-\pi/3) = \dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

5) $(\sqrt{3}-i)^7 = 2^7(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2})$

6) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-i\dfrac{1}{2}\right)^{2009}$

Exercice 4

Déterminer la nature de l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ dans chacun des cas suivants

1) $|z+3i| = 5$ (considérer le point $A(-3i)$). Cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 5.

2) $|z-5i| = 2$ Cercle de centre $B(5i)$ et de rayon 2.

3) $|z-1-i| = 1$ Cercle de centre $C(1+i)$ et de rayon 1.

4) $|z+2-3i| = 5$ Cercle de centre $D(-2+3i)$ et de rayon 5.

5) $|z-1-i| = |z+2-3i|$ Médiatrice du segment $[CD]$ (définis ci-dessus).

6) $|z+1-i| = |z+1+i|$ Médiatrice du segment $[EF]$ avec $E(-1+i)$ et $F(-1-i)$, c'est-à-dire l'axe des réels. On peut remarquer que la médiatrice de $[NN']$ avec $N(z)$ et $N'(\overline{z})$ est toujours l'axe réel.

7) $\left|\dfrac{z-3+i}{z-5-i}\right| = 1$ Médiatrice du segment $[GH]$ avec $G(3-i)$ et $H(5+i)$. On remarque que z sera toujours différent de $5+i$, donc il n'y a pas de problèmes.

Exercice 5

1) $\arg(z+3i) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = 0[\pi]$ Droite de direction $\overrightarrow{u}$ passant par $A(-3i)$, privée de A. Équation réduite $y = -3$ (et $x \neq 0$).

2) $\arg(z-5i) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BM}) = \pi/2[\pi]$ Droite de direction perpendiculaire à $\overrightarrow{u}$ passant par $B(5i)$, privée de B. C'est l'axe vertical (correspondant aux imaginaires purs) privé de B.

3) $\arg\left(\dfrac{z-1-i}{z-5}\right) = (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{DM}) = 0[\pi]$ avec $C(5)$ et $D(1+i)$. Droite (CD) privée des points C et D.

4) $\dfrac{z-1-i}{z-5}$ est un nombre réel. C'est-à-dire $\arg\left(\dfrac{z-1-i}{z-5}\right)=0[\pi]$ ou $\dfrac{z-1-i}{z-5}=0$. La seconde condition nous donne le point D, donc, d'après ci-dessus, on trouve la droite (CD) privée de C.

5) $\arg\left(\dfrac{z-1+i}{z+2-3i}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Cercle de diamètre $[EF]$, avec $E(1-i)$ et $F(-2+3i)$.

6) $\dfrac{z+\sqrt{3}-i}{z-3i}$ est un imaginaire pur, c'est-à-dire $\arg\left(\dfrac{z+\sqrt{3}-i}{z-3i}\right)=\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ ou $\dfrac{z+\sqrt{3}-i}{z-3i}=0$.

On trouve donc le cercle de diamètre $[GH]$ privé de H, avec $G(-\sqrt{3}+i)$ et $H(3i)$.

Exercice 6 (Vrai-Faux)

Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation est juste ou fausse. Justifier.

1) Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}, \quad z=z' \Longleftrightarrow |z|=|z'|$

2) Pour tout $z \in \mathbb{C}, \quad |1+iz|-\sqrt{1+z^2}$

3) Pour tout $z \in \mathbb{C}, \quad \Re(z)<-2 \Longrightarrow |z|>2$

4) Pour tout $z \in \mathbb{C}, \quad \arg(z)=-\pi/4[2\pi] \Longrightarrow \arg(2\overline{z})=\pi/2[2\pi]$

<u>Indication</u> : *N'hésitez pas à faire des dessins. Pour nier « pour tout $z \in \mathbb{C}$, blabla », trouvez un contre exemple bien concret, un z tel que « blabla » soit faux.*

Exercice 7

Déterminer la nature de l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ dans chacun des cas suivants.

1)$(\overline{z}-1)(z+i)$ est réel. **2)**$\dfrac{iz}{2-z}$ est réel. **3)**$|z-2|=|\overline{z}+i|$

4)$|iz-2|=3$ **5)**$\arg(\overline{z})=\arg(-z)[2\pi]$

Exercice 8 (pour aller plus loin)

Quelques questions en vrac :

1) Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que z, $1/z$ et $1-z$ aient même module.

2) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{24}$, $\sin\dfrac{\pi}{24}$ et $\tan\dfrac{\pi}{24}$.

3) Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, tels que $|z|=1$ et $z'=1$. Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'} \in \mathbb{R}$.