Exercices : Nombres complexes

Exercice 1 (à savoir faire les yeux fermés)
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

3	$1-i$	$\sqrt{3}+i\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\sqrt{5}$
$5\sqrt{3}-5i$	$2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$	$5i$	$\frac{2\sqrt{3}}{7}-\frac{6}{7}i$	$\frac{-1+i}{3}$
$-\frac{\sqrt{3}+i}{2}$	$i(\sqrt{2}+2)$	$-3-i\sqrt{3}$		

Exercice 2
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$(1+i)^3$	$(-1-i)^5$	$(\sqrt{5}+i\sqrt{5})^8$	$\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2009}$	$(\sqrt{3}-i)^7$
$(5\sqrt{3}-5i)^6$	$(5i)^7$	$\frac{\frac{2\sqrt{3}}{7}-\frac{6}{7}i}{-3-i\sqrt{3}}$	$\frac{3+3i}{-\sqrt{3}-i}$	$\frac{-1+i}{3i}$

Indication : *Pour calculer le module et un argument de z^n, calculer $|z|$ et $\arg(z)$ puis en déduire $|z^n|$ et $\arg(z^n)$.*

Exercice 3
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$(1+i)^3$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8$	$(-\sqrt{5}-i\sqrt{5})^8$	$\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{31}$
$(\sqrt{3}-i)^7$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)^{2009}$		

Indication : *Il y a des puissances, il faut donc penser à passer par la forme trigonométrique.*

Exercice 4
Déterminer la nature de l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ dans chacun des cas suivants

1) $|z+3i| = 5$ (considérer le point $A(-3i)$).
2) $|z-5i| = 2$ (introduire un point bien choisi)
3) $|z-1-i| = 1$
4) $|z+2-3i| = 5$
5) $|z-1-i| = |z+2-3i|$
6) $|z+1-i| = |z+1+i|$
7) $\left|\frac{z-3+i}{z-5-i}\right| = 1$ (attention à ne pas diviser par 0)

Exercice 5
Déterminer la nature de l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ dans chacun des cas suivants. Aller jusqu'au bout du raisonnement en décrivant l'objet géométrique obtenu.
Faire attention aux points interdits.

1) $\arg(z+3i) = 0[\pi]$ (considérer le point $A(-3i)$).
2) $\arg(z-5i) = \pi/2[\pi]$
3) $\arg\left(\frac{z-1-i}{z-5}\right) = 0[\pi]$
4) $\frac{z-1-i}{z-5}$ est un nombre réel.
5) $\arg\left(\frac{z-1+i}{z+2-3i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$
6) $\frac{z+\sqrt{3}-i}{z-3i}$ est un imaginaire pur.

Exercice 6 (Vrai-Faux)
Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'affirmation est juste ou fausse. Justifier.

1) Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}, \quad z = z' \Longleftrightarrow |z| = |z'|$

2) Pour tout $z \in \mathbb{C}, \quad |1 + iz| - \sqrt{1 + z^2}$

3) Pour tout $z \in \mathbb{C}, \quad \Re(z) < -2 \Longrightarrow |z| > 2$

4) Pour tout $z \in \mathbb{C}, \quad \arg(z) = -\pi/4[2\pi] \Longrightarrow \arg(2\overline{z}) = \pi/2[2\pi]$

<u>Indication</u> : *N'hésitez pas à faire des dessins. Pour nier « pour tout $z \in \mathbb{C}$, blabla », trouvez un contre exemple bien concret, un z tel que « blabla » soit faux.*

Exercice 7
Déterminer la nature de l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ dans chacun des cas suivants.

1) $(\overline{z} - 1)(z + i)$ est réel.

2) $\dfrac{iz}{2 - z}$ est réel.

3) $|z - 2| = |\overline{z} + i|$

4) $|iz - 2| = 3$

5) $\arg(\overline{z}) = \arg(-z)[2\pi]$

Exercice 8 (pour aller plus loin)
Quelques questions en vrac :

1) Déterminer $z \in \mathbb{C}$ tel que z, $1/z$ et $1 - z$ aient même module.

2) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{24}$, $\sin\dfrac{\pi}{24}$ et $\tan\dfrac{\pi}{24}$.

3) Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, tels que $|z| = 1$ et $z' = 1$. Montrer que $\dfrac{z + z'}{1 + zz'} \in \mathbb{R}$.