Corrigé des exercices du livre

2 Limites et continuité

2.1 Première semaine

Exercice 1

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 5x^3 = -\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -2x^4 = -\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 = +\infty$;

Exercice 3

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 5 = 5$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5x}{x} = 5$;

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{6}{x} = -\infty$; De même, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{6}{x} = +\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+2}{x^2-6x+9} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0$; De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$;

Lorsque $x \to 3$, $(x-3)^2 \to 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{5}{(x-3)^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{5}{x} = +\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{x^2} = -\infty$.

Exercice 4

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$;

$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{2}{x+2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-2} 3x-5 = -11$, donc $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$;

De même $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$; De même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$;

Lorsque $x \to 0$, $x^2 \to 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{5}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{5}{x} = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} -\dfrac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$.

Exercice 45

Si le dénominateur s'annule, le factoriser pour bien étudier son signe au voisinage de la limite. Si le numérateur s'annule aussi, le factoriser et simplifier la fraction. Je ne donne que les résultats, pas la rédaction.

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = 2$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+x+1}{x+2} = \dfrac{4}{3}$;

Exercice 46

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $f(x) = \dfrac{1}{x-3}\left(1 - \dfrac{2}{x+3}\right)$ donc $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = +\infty$;

2) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{4}{3}$;

Exercice 47
Du sinus : si les choses ne se simplifient pas toutes seules, c'est qu'il faut utiliser le théorème des gendarmes (ou assimilé). La question 1 est entièrement rédigée.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x \geq -1$, donc $f(x) \geq 2x-1$. De plus $\lim_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty$. Donc, d'après la propriété de comparaison des limites, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut $+\infty$.

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 2x-1$ et $\lim_{x\to-\infty} 2x-1 = -\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existe et vaut $-\infty$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^3(2-1) \leq f(x) \leq x^3(2+1)$, et $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} 3x^3 = -\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe et vaut $+\infty$; et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ existe et vaut $-\infty$.

Exercice 38

1) $f(-1) = -4+3-1/2 = -3/2$, $f(-1/2) = -1/2+3/2-1/2 = 1/2$, $f(0) = -1/2$ et $f(1) = 4-3-1/2 = 1/2$.

2) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions continues. De plus $f(-1) = -3/2$, $f(-1/2) = 1/2$ donc $0 \in [-3/2; 1/2]$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_1 \in [-1; -1/2]$ tel que $f(x_1) = 0$.

De même, $0 \in [f(0); f(-1/2)]$ donc il existe $x_2 \in [-1/2; 0]$ tel que $f(x_2) = 0$; et $0 \in [f(0); f(1)]$ donc il existe $x_3 \in [0; 1]$ tel que $f(x_3) = 0$.

D'après les calculs de la question 1, les solutions trouvées ne sont pas au extrémités des intervalles précédents, donc elles sont distinctes.

2.2 Révisions pour le 28 septembre

Exercice 33
Corrigé dans le livre.

Exercice 37
Corrigé dans le livre.

3 Dérivation

Exercice 7

1) $f(0) = 2$, $f(-1) = 1$, $f(2) = -1$.

2) Attention ! Il s'agit de la dérivée, donc du coefficient directeur de la tangente. On lit donc $\Delta y/\Delta x$. Et on ne se trompe **jamais** sur le signe : si la droite descend, le signe est négatif, sinon il est positif. $f'(0) = 0$, $f'(-1) = 2/1 = 2$, $f'(2) = -1/2$.

Exercice 20

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x) = 2\times 4x^3 - 27 = (2x)^3 - 3^3 = (2x-3)(4x^2+6x+9)$. Or $\Delta = 36 - 4\times 4\times 9 = -27 < 0$ donc $4x^2+6x+9$ est du signe de $a = 4$. Le tableau de signe de f', dont on déduit le tableau de variation de f, s'écrit :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x-3$		$-$	0	$+$	
$4x^2+6x+9$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(3/2)$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, f est dérivable en x et $f'(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{4x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{6x-3}{2\sqrt{x}}$.
Le tableau de signe de f', dont on déduit le tableau de variation de f, s'écrit :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$6x-3$		$-$	0	$+$	
$2\sqrt{x}$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$f(1/2)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ donc $f'(x) = 3x^2 - 8x + 1 = 3(x-x_1)(x-x_2)$. Or $\Delta = 8^2 - 4 \times 3 \times 1 = (2\sqrt{13})^2$ donc $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{13}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{13}}{3}$.
Le tableau de signe de f', dont on déduit le tableau de variation de f, s'écrit :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x - x_2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x) = 1 - \sin x$. Or, $\sin x < 1$ sauf en un ensemble discret de points x, donc $f'(x) > 0$ sauf en ces points. D'où f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, f est dérivable en x et $f'(x) = \dfrac{(2(x+1) - (2x-3) \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{5}{(x+1)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$. Attention, il y a deux intervalles distincts, on est dans une situation du type fonction inverse.

6) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, f est dérivable en x et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{2x\sqrt{x}} = \dfrac{-2+\sqrt{x}}{2x^2}$. Le tableau de signe de f', dont on déduit le tableau de variation de f, s'écrit :

x	0		2		$+\infty$
$-2+\sqrt{x}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	0

Exercice 25
Corrigé dans le livre.

Exercice 57

1) La fonction f est composée de fonctions dérivables sur I, elle est donc dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, ce qui ne nous avance à rien. Par contre, on sait que $x \mapsto -\sqrt{x}$ est strictement décroissante sur I et que $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ est aussi strictement décroissante sur I (par une rapide étude du signe de sa dérivée). Ainsi f est strictement décroissante sur I.

2) **a.** La fonction f est **continue** et **strictement monotone** sur l'**intervalle** I. De plus $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty > 0$ et $f(2) = -1 < 0$. Donc, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in]1;2[$ tel que $f(x) = 0$.

b. Par un balayage sur la calculatrice, on trouve que $f(1{,}7) > 0$ et $f(1{,}8) < 0$ donc, pour la même raison qu'à la question précédente, $\alpha \in]1{,}7;1{,}8[$.