La fonction exponentielle

Problème à résoudre

On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\left\{\begin{array}{rcl} f(0) & = & 1 \\ f' & = & f \end{array}\right.$
Nous avons déjà essayé de construire une représentation graphique *approchée* d'une telle fonction au voisinage de 0 en utilisant la méthode d'Euler.

I) Définition de la fonction exponentielle

1) Théorème et définition

Théorème 1

Démonstration.

Pour démontrer l'unicité d'une telle fonction nous allons avoir besoin d'un résultat intermédiaire :

Lemme 2
Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $f' = f$, alors

1)

2)

Démonstration du lemme 2.

$\square$

Démonstration du théorème 1 (unicité).

$\square$

2) Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété 3

1)

2)

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

6) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

7) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$,

Démonstration.

$\square$

3) Le nombre e et la notation puissance

Les résultats précédents montrent que la fonction exp possède les propriétés algébriques des puissances.

Définition 4

Remarque 5
$e \simeq \dots$. On peut d'ailleurs obtenir cette approximation avec la ... .

Recherche d'une notation simplifiée : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \exp(n) &= \\ \exp(-n) &= \end{aligned}$$

Notation 6

II) Étude de la fonction exponentielle

1) Sens de variation

Propriété 7

Démonstration.

□

2) Tableau de variation

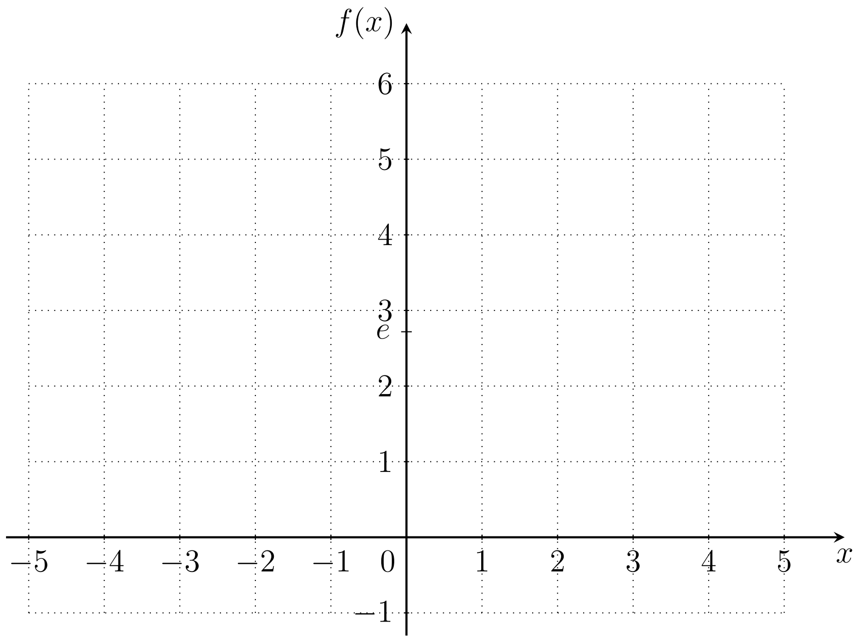
x	
exp	

Propriété 8
- Asymptotes :
- Équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $x = 0$.

- Position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente en $x = 0$

- Équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en $x = 1$.

3) Représentation graphique



4) Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété 9

Démonstration.

□

5) Limites en l'infini

Propriété 10

Démonstration.

□

III) Applications

1) Fonctions composées du type e^u

C'est un cas particulier de fonction composée à connaître *impérativement*.

Propriété 11

Démonstration.

□

Exemple 12
Étudier la fonction définie par $f(x) = e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) Croissance comparée

Propriété 13

1)

2)