

IV) Étude de la fonction tangente

A) Définition

Définition 1

La fonction tangente, notée \tan , est la fonction définie pour tout $x \neq \dots$

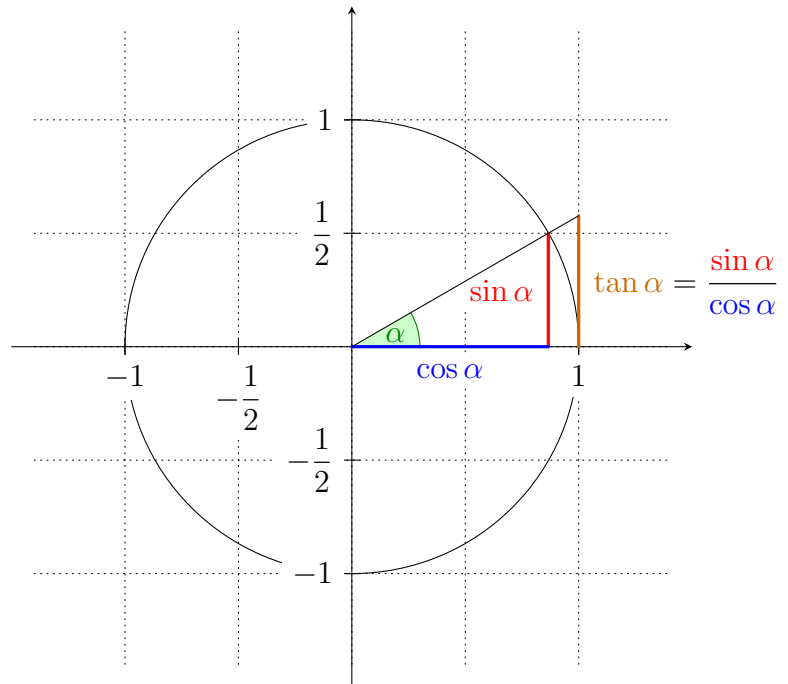
par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$\mathcal{D}_{\tan} = \dots$

Sur le cercle trigonométrique, la **tangente** se lit sur la *droite tangente au cercle en A(0, 1)*. Le théorème de Thalès nous donne ce résultat

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$



B) Propriétés géométriques

Propriété 1

La fonction \tan est \dots -périodique.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan} = \dots$

$$\tan(x + \dots) = \dots$$

□

Il suffit donc d'étudier la fonction tangente sur un intervalle de longueur \dots . On va donc restreindre l'étude à l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Propriété 2

La fonction \tan est impaire.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathcal{D}_{\tan} = \dots$

$$\tan(-x) = \dots$$

Conséquences graphiques.

- Comme tan est π -périodique, sa courbe représentative est invariante par ...
- Comme tan est impaire, dans un repère orthonormal sa courbe représentative est ...

C) Étude

1) Calcul de la dérivée et variations

Propriété 3

La fonction tan est dérivable sur \mathcal{D}_{\tan} et $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.

Démonstration. La fonction tan est dérivable car composée de fonctions dérivables (sin et cos).

$$\tan'(x) = \dots$$

□

Conséquence 1

La fonction tan est strictement croissante sur tout intervalle du type $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

□

2) Tableau de variation

Pour les raisons de symétrie évoquées dans la partie B), nous allons dresser le tableau sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

• $\tan(0) = \text{---}\ddots\text{---}$

• Étude de la limite en $\frac{\pi}{2}^-$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos(x) = 0^+ \end{array} \right\} \text{Donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \dots$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$		
\tan		

D) Tableau de valeurs

De même que dans le cas du sinus et du cosinus, il faut connaître — ou savoir retrouver — certaines valeurs de $\tan(x)$.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(x)$				
$\sin(x)$				
$\cos(x)$				

E) Représentation graphique

