# Mathématiques

***(Correction — APMEP)***

**Exercice 1 (Antilles-Guyane, juin 2007)**

**1)** Les plans $(P)$ et $(Q)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}(0;2;1)$ et $\overrightarrow{n'}(0\ ;\ 1\ ;\ -2)$. On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'}=0$, donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n'}$ et par suite, les plans $(P)$ et $(Q)$ sont perpendiculaires.

**2)** L'intersection des plans $(P)$ et $(Q)$ est une droite (plans perpendiculaires).
$A\in(P)$ car $2\times 0+6-6=0$ et $A\in(Q)$ car $0-12+12=0$, donc $A\in(P)\cap(Q)$ ;
on montre de la même façon que $I\in(P)\cap(Q)$.
Les points $A$ et $I$ étant distincts, la droite d'intersection des plans $(P)$ et $(Q)$ est donc la droite $(AI)$, c'est-à-dire la droite $(D)$.

**3)** Soit $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ un point de l'espace. $M$ appartient à l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right.$.

$M$ appartient à l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ et au plan $(P)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ z &=& 0\\ 2y+z-6 &=& 0\end{array}\right.$ c'est-à-dire si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 3\\ z &=& 0\end{array}\right.$. Le plan $(P)$ coupe donc l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ au point $B(0\ ;\ 3\ ;\ 0)$.

Un raisonnement analogue montre que le plan $(Q)$ coupe l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ en un point $C(0\ ;\ -12\ ;\ 0)$.

**4)** On a $\overrightarrow{AC}(-3\ ;\ -12\ ;\ -6)$ donc le plan $(T)$ a une équation cartésienne de la forme : $-3x-12y-6z+d=0$. Et $B(0\ ;\ 3\ ;0)\in(T)$, donc $0-12\times 3-0+d=0$, d'où $d=36$. Le plan $(T)$ a donc pour équation cartésienne $-3x-12y-6z+36=0$, ou encore, en simplifiant par $-3$ : $x+4y+2z-12=0$.

**5)** La droite $(OA)$ passe par $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}(3\ ;\ 0\ ;\ 6)$. Une représentation paramétrique de $(OA)$ est donc : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t\\ y &=& 0\\ z &=& 6t\end{array}\right.\quad (t\in\mathbb{R})$ .

Un point $M$ appartient à la droite $(OA)$ et au plan $(T)$ si et seulement si il existe un réel $t$ tel que $M(3t\ ;\ 0\ ;\ 6t)$ et $(3t)+4\times 0+2\times(6t)-12=0$, ce qui donne une unique valeur : $t=\frac{4}{5}$. La droite $(OA)$ et le plan $(T)$ sont donc sécants en un point $H$ qui a pour coordonnées $\left(3\times\frac{4}{5}\ ;\ 0\ ;\ 6\times\frac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire $H\left(\frac{12}{5}\ ;\ 0\ ;\ \frac{24}{5}\right)$.

**6)** Les points $B$ et $H$ appartiennent au plan $(T)$ qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{AC}$, donc $(BH)\perp(AC)$ : le point $H$ appartient à la hauteur issue de $B$ du triangle $ABC$.
$H\in(OA)$ et $\overrightarrow{BC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{j}$, donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{i}.K\overrightarrow{j}=0$. Ainsi $(AH)\perp(BC)$ : le point $H$ appartient à la hauteur issue de $A$ du triangle $ABC$.
Le point $H$ est donc l'orthocentre du triangle $ABC$.

**Exercice 2 (La Réunion, juin 2006)**

**1)** **a)** On a $d(\mathrm{O}\ ;\ \mathcal{P}) = \frac{|-1|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}}$ Faux

**b)** Vrai

**c)** Vrai : le vecteur $2\overrightarrow{n}(2\ ;\ 3\ ;\ 4)$ est un vecteur normal au plan.

**d)** Le vecteur $\overrightarrow{p}(-5\ ;\ 2\ ;\ 1)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$. Et $2\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{p} = -10++6+4 = 0$. Les vecteurs normaux sont orthogonaux donc les plans ne sont pas parallèles mais perpendiculaires. Faux

**2)** **a)** $P$ admet pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{n}(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{u} = 2-4+2 = 0$. Ces vecteurs sont orthogonaux donc la droite est bien parallèle au plan. Vrai

**b)** Faux car $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u}$ ne sont pas colinéaires.

**c)** On sait que $D$ est parallèle au plan. $\mathrm{A}\in P \iff 2+1-1=0$ est une égalité fausse, donc la droite $D$ n'est pas incluse dans le plan. Faux

**d)** Le système proposé est bien la traduction de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = \alpha\overrightarrow{u}$. Vrai

**3)** **a)** Les deux plans ont pour vecteurs respectifs normaux $\overrightarrow{v}(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $\overrightarrow{w}(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} = 1-1 = 0$. Les deux plans sont orthogonaux, leur intersection est donc une droite. Faux

**b)** On a effectivement $1+1+1=3$ et $2-1=1$, donc l'ensemble E est bien une droite contenant A. Vrai

**c)** Faux

**d)** $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z &=& 3\\ 2x-z &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y &=& 3-z\\ 2x &=& 1+z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+y &=& 3-z\\ x &=& \frac{1+z}{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y &=& \frac{5-3z}{2}\\ x &=& \frac{1+z}{2}\end{array}\right.$

L'ensemble des points de E est donc l'ensemble des points de coordonnées $\left(\frac{1+z}{2}\ ;\ \frac{5-3z}{2}\ ;\ z\right)$.

L'équation paramétrique de cette droite est donc : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{1}{2}+\frac{1}{2}z\\ y &=& \frac{5}{2}-\frac{3}{2}z\\ z &=& z\end{array}\right.$

En posant $z=2t$, on obtient le système : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{1}{2}+t\\ y &=& \frac{5}{2}-3t\\ z &=& 0+2t\end{array}\right.$

Cette équation est celle de la droite contenant $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}\ ;\ \frac{5}{2}\ ;\ 0\right)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$.

Vrai

**4)** **a)** Faux (difficile à justifier)

**b)** (AH) est orthogonale à (BC) donc appartient aussi au plan $P$. Vrai

**c)** $\overrightarrow{\mathrm{B}M}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} \iff \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{B}M}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}\right) = 0 \iff \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}M} = 0$.

L'ensemble des points $M$ est donc le plan contenant A et orthogonal à (BC) : c'est bien le plan $P$. Vrai

**d)** Faux : La face (ABC) étant quelconque la hauteur [AH] n'est pas la médiane relative à [BC].