Mathématiques

Correction

Question de cours. Voir cours.

Exercice 1

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \dfrac{e^{-x}+1-(e^{-x}-1)}{e^{-x}+1} = \dfrac{2}{e^{-x}+1}$ Ainsi

$$1 - \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} - \frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{2}{e^{-x}+1} - \frac{2e^x}{e^x+1} = \frac{2e^x}{1+e^x} - \frac{2e^x}{e^x+1} = 0$$

Donc l'égalité est **vraie**.

2) Tableau de signe :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$1 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(e^x-1)(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'affirmation est **fausse**.

3) Pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u > 0$, donc l'affirmation est **fausse**.

4) Pour $x = -1$, l'égalité s'écrit $e^{-1+1} = e^0 = 1 = e + \dfrac{1}{e}$, ce qui est faux. Donc l'affirmation est **fausse**.

5) La fonction $x \mapsto -x+1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction exp est croissante, donc la fonction $x \mapsto e^{-x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est **vraie**.

6) Soit $f(x) = xe^{2x} - 1$ sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{2x} + x(2e^{2x}) = (1+2x)e^{2x}$. Ainsi $f'(-1/2) = 0 \neq 2e^{2\times(-1/2)}$, la formule est **fausse**.

Exercice 2 (QCM)

1) c) 2) c) 3) c) 4) c) 5) c)

Les auteurs des sujets éviteront que cette situation se reproduise.

Exercice 3 (Pondichery, mars 2003)
Partie A : Conjectures

1) La fonction f semble strictement croissante sur $[-3;2]$.

2) Il semble que la courbe soit sous l'axe des abscisses pour tout $x \in [-3;0[$ et au-dessus pour tout $x \in]0;-2[$.

Partie B : Contrôle de la première conjecture

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x + x^2)e^{x-1} - x = x(x+2)e^{x-1} - x = xg(x)$

2) **a)** • $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = (xe^x)/e + 2e^{x-1} - 1$. Or, par croissance comparée $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x-1} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$.

b) et **c)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (1 + x + 2)e^{x-1} = (x+3)e^{x-1}$. La fonction exp est toujours positive donc il vient

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
e^{x-1}		$+$		$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1	$\searrow$	$-e^{-4}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

Car $g(-3) = -e^{-4} - 1$.

d) • Sur l'intervalle $]-\infty;-3]$, la fonction g est décroissante, donc, pour tout $x \in]-\infty;-3]$, $g(x) \leq \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1 < 0$. Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty;-3]$.

• Sur l'intervalle $[-3;+\infty[$, la fonction g est continue (car composée de fonctions continues), strictement croissante, $g(-3) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[-3;+\infty[$.

En conclusion, l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

De plus $g(0{,}20) \simeq -0{,}011 < 0$ et $g(0{,}21) \simeq 0{,}003 > 0$. Donc, toujours d'après le théorème de la bijection, $\alpha \in]0{,}20;0{,}21[$.

e) De la question précédente, on déduit

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3) **a)** et **b)** On dresse le tableau de signe de f', et on en déduit le sens de variations de la fonction f. D'après la réponse à la question 2)d), $\alpha > 0$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites sont données à titre indicatif et sans justifications.

c) La première conjecture est fausse : la fonction continue f est strictement décroissante sur $[0;\alpha]$, donc $f(\alpha)<0$. Ainsi la fonction f va franchir une seconde fois l'axe (xx') après α.

Partie C : Contrôle de la deuxime conjoncture

1) Pour montrer que deux quantités sont égales, on montre que la différence est nulle.

$$f(\alpha)-\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}=\alpha^2e^{\alpha-1}-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}=\alpha^2e^{\alpha-1}-\frac{\alpha^2(\alpha+2)}{2(\alpha+2)}+\frac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}=\alpha^2e^{\alpha-1}-\frac{2\alpha^2}{2(\alpha+2)}$$

Or, par définition de α, $g(\alpha)=(\alpha+2)e^{\alpha-1}-1=0$, c'est à dire $e^{\alpha-1}=\dfrac{1}{\alpha+2}$. Ainsi,

$$f(\alpha)-\frac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}=\alpha^2e^{\alpha-1}-\frac{2\alpha^2}{2(\alpha+2)}=\frac{\alpha^2}{\alpha+2}-\frac{2\alpha^2}{2(\alpha+2)}=0$$

En conclusion, $f(\alpha)=\dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2) **a)** Soit $x\in[0;1]$. $x+2\neq 0$ donc h est bien définie, et dérivable car composée de fonctions dérivables. Dérivons le quotient.

$$h'(x)=\frac{-3x^2(2(x+2))-(-x^3)\times 2}{(2(x+2))^2}=\frac{-6x^3-12x^2+2x^3}{4(x+2)^2}=\frac{-x^3-3x^2}{(x+2)^2}=\frac{-x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

Un carré est toujours positif, donc $h'(x)$ est du signe de $-(x+3)$. Or ici $x\in]0;1]$, donc $-(x+3)\leq -3<0$, donc h est strictement décroissante sur $]0;1]$.

b) Appliquons le résultat de la question précédente à l'encadrement trouvé à la question B.2.d : h est décroissante, donc

$$0{,}20<\alpha<0{,}21 \qquad\Longrightarrow\qquad h(0{,}20)>h(\alpha)>h(0{,}21)$$

D'après le résultat de la question C.1), $f(\alpha)=h(\alpha)$. Ainsi, $h(0{,}20)>f(\alpha)>h(0{,}21)$

3) **a)** La courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses en $x\in\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)=0$. Or $f(x)=x^2e^{x-1}-\dfrac{x^2}{2}$, donc l'équation s'écrit

$$x^2(e^{x-1}-1/2)=0$$

Les solutions sont $x=0$ et $x=\beta$ tel que $e^{\beta-1}=1/2$. Nous verrons dans un chapitre ultérieur que β peut s'exprimer à l'aide du *logarithme*.

b) D'après le tableau de variation de la question B.3.b, la courbe est sous l'axe des abscisses sur $]-\infty;0[\cup]0;\beta[$, et au-dessus sur $]\beta;+\infty[$.

c) La seconde conjecture est donc fausse.

Exercice 4

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 - \cos x$. Or

$$\begin{array}{rrcll} & -1 & \leq & \cos x & \leq & 1 \\ \Longrightarrow & -1 & \leq & -\cos x & \leq & 1 \\ \Longrightarrow & 1 & \leq & f'(x) & \leq & 3 \end{array}$$

En particulier $f'(x) > 0$. Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc, de même,

$$2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$$

Procédons par comparaison :
- $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x - 1 = +\infty$ et $2x - 1 \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x + 1 = -\infty$ et $f(x) \leq 2x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2) • $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}_1$. Le point $M(x, f(x))$ de $\mathscr{C}$ est sur la droite $\mathscr{D}_1$ si et seulement si $f(x) = 2x - 1$.

$$f(x) = 2x - 1 \Longleftrightarrow 2x - \sin x = 2x - 1 \Longleftrightarrow \sin x = 1$$

Or $\sin x = 1$ si et seulement si $x = \pi/2 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Donc les points commun à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_1$ sont les points d'abscisses $x_k = \pi/2 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. La tangente en $x = x_k$ à la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(x_k)(x - x_k) + f(x_k) \\ & = & (2 - \cos(\pi/2 + 2k\pi))(x - x_k) + 2x_k - \sin(\pi/2 + 2k\pi) \\ & = & 2(x - x_k) + 2x_k - 1 \\ & = & 2x - 1 \end{array}$$

La droite $\mathscr{D}_1$ est donc tangente à $\mathscr{C}$ aux points $M_k(x_k, f(x_k))$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

• $\mathscr{C} \cap \mathscr{D}_2$. On procède de même. Le point $M(x, f(x))$ de $\mathscr{C}$ est sur la droite $\mathscr{D}_2$ si et seulement si $f(x) = 2x + 1$, c'est-à-dire $\sin x = -1$.
Donc les points commun à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_2$ sont les points d'abscisses $x'_k = -\pi/2 + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. La tangente en $x = x'_k$ à la courbe $\mathscr{C}$ a pour équation

$$\begin{array}{rcl} y & = & f'(x'_k)(x - x'_k) + f(x'_k) \\ & = & (2 - \cos(-\pi/2 + 2k\pi))(x - x'_k) + 2x'_k - \sin(-\pi/2 + 2k\pi) \\ & = & 2(x - x'_k) + 2x'_k + 1 \\ & = & 2x + 1 \end{array}$$

La droite $\mathscr{D}_1$ est donc tangente à $\mathscr{C}$ aux points $M'_k(x'_k, f(x'_k))$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = 2(-x) - \sin(-x) = -2x + \sin x = -f(x)$.
Donc la fonction f est impaire.

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + 2\pi) = 2(x + 2\pi) + \sin(x + 2\pi) = 2x + 4\pi + \sin x = f(x) + 4\pi$$

Une translation de 2π selon les x translate de 4π selon les $f(x)$: la courbe $\mathscr{C}$ est stable par translation de vecteur $\overrightarrow{u} = 2\pi\overrightarrow{\imath} + 4\pi\overrightarrow{\jmath}$.
En conclusion, on passe de la partie de $\mathscr{C}$ représentant la fonction f sur $[-\pi; \pi]$ à la partie de $\mathscr{C}$ représentant la fonction f sur $[-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$) par la translation de vecteur $k\overrightarrow{u}$.

Exercice 5

1)
- La courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine O signifie $f(0) = 0$. Or $f(0) = 2e^0 + a \times 0 + b = 2 + b$. Ainsi $b = -2$.
- La tangente à $\mathscr{C}$ en O a pour coefficient directeur 3 signifie $f'(0) = 3$. Or $f'(x) = 2e^x + a$ et $f'(0) = 2e^0 + a = 2 + a$. Ainsi $a = 1$

2) Pour tout $x \in [0;1]$, $f'(x) = 2e^x + 1 \geq 2e^0 + 1 > 0$. Ainsi

x	-1	1
$f'(x)$	$+$	
f	$2e^{-1} - 3$ $\nearrow$	$2e - 1$

Question ouverte

Pour prouver une inégalité entre deux termes, on suit le même modèle que pour une égalité : on étudie le signe de la différence !

- Première inégalité. Pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, posons $f(x) = \tan(x) - x$.

  La fonction f est définie et dérivable pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, et $f'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$. La fonction f est donc croissante sur cet intervalle, et pour tout x de cet intervalle $0 = f(0) \leq f(x)$. Ce qui nous donne

$$x \leq \tan x$$

- Seconde inégalité. Pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, posons $g(x) = \tan(x) - 2x$.

  La fonction g est définie et dérivable pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, et $g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 2 = \tan^2(x) - 1$. Or, sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, la fonction tangente est strictement croissante et comprise entre $\tan 0 = 0$ et $\tan \pi/4 = 1$. On dresse le tableau de signe de $g'(x) = (\tan(x) - 1)(\tan(x) + 1)$, dont le tableau de variation de g se déduit.

x	0		$\pi/4$
$\tan(x) - 1$		$-$	0
$\tan(x) + 1$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0
g	0	$\searrow$	$g(\pi/4)$

  Ainsi, pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, $0 = g(0) \geq g(x) = \tan(x) - 2x$. Ce qui nous donne

$$\tan x \leq 2x$$