Bac blanc Samedi 10 octobre 2009

Mathématiques

NOM : GROUPE :

PRÉNOM :

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation de votre copie. **Soulignez vos résultats.**
Les calculatrices sont autorisées.

Durée : *4 heures.*

Question de cours.

1) a) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle en $x = 0$.

b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

c) Démontrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

2) Énoncer puis démontrer le théorème de la bijection.

3) En déduire que l'équation $\exp(x) = 2009$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 1

Répondre par *vrai* ou *faux*. **Justifier** dans chaque cas.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$

2) L'ensemble des solutions de l'inéquation $(e^x - 1)(1 - x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ est $]-\infty; 1]$.

3) $e^{-2} < 0$

4) Pour tout réel x, $e^{x+1} = e + e^x$.

5) La fonction $x \mapsto e^{-x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

6) On pose $f(x) = xe^{2x} - 1$ sur $\mathbb{R}$. Alors $f'(x) = 2e^{2x}$.

Exercice 2 (QCM)

Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse correcte rapportera une unité de points, chaque réponse fausse retire une demi unité. Pour chacune des questions, entourer la seule réponse correcte.

1) L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $e^x = 0$ est

a) $\{0\}$ b) $\{1\}$ c) n'a pas de solution

2) La courbe représentative de l'exponentielle a une

a) tangente horizontale. b) asymptote verticale c) asymptote horizontale

3) On pose $f(x) = e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Alors

a) $f'(x) = e^{-x}$ b) $f'(x) = \dfrac{1}{e^x}$ c) $f'(x) = -\dfrac{1}{e^x}$

4) On pose $g(x) = \dfrac{1}{\tan x}$ sur $\left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Alors

a) $g'(x) = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$ b) $g'(x) = -\dfrac{1}{\tan^2 x}$ c) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

5) La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^3 x$ est, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

a) $f'(x) = 3\cos^2 x \sin x$ b) $f'(x) = 3\cos^2 x$ c) $f'(x) = 3\sin^3 x - 3\sin x$

Exercice 3

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

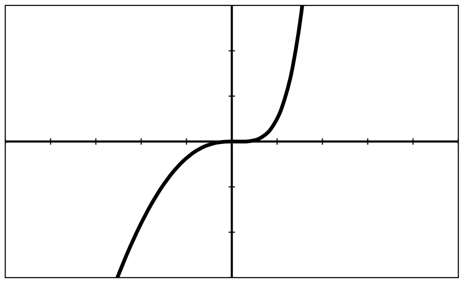
$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Partie A : Conjectures Le graphique (page ci-contre) est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.

À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

1) le sens de variations de f sur $[-3; 2]$?

2) la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?



Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les complèter.

Partie B : Contrôle de la première conjecture

1) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

2) Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.

- **a)** Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis quand x tend vers $-\infty$.
- **b)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
- **c)** En déduire le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.
- **d)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.
- **e)** Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3) Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

- **a)** Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
- **b)** En déduire le sens de variations de la fonction f.
- **c)** Que pensez-vous de votre première conjoncture ?

Partie C : Contrôle de la deuxime conjoncture

On note $\mathscr{C}$ la courbe reprsentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

- **a)** Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0; 1]$, puis déterminer le sens de variations de h sur $[0; 1]$.
- **b)** En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

3)
- **a)** Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$.
- **b)** Préciser alors la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
- **c)** Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

Exercice 4
On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x - \sin x$$

et on appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction f et de sa courbe $\mathscr{C}$.

1) Calculer la dérivée de f et en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout réel x :
$$2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$$
En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) On appelle $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les droites d'équations respectives :

$$y = 2x - 1 \qquad \text{et} \qquad y = 2x + 1$$

Déterminer les points communs à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_1$ puis à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}_2$.
Préciser les tangentes à $\mathscr{C}$ en ces points.

3) Étudier la parité de la fonction f.

4) Calculer $f(x + 2\pi)$ en fonction $f(x)$. Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la partie de $\mathscr{C}$ représentant la fonction f sur $[-\pi; \pi]$ à la partie de $\mathscr{C}$ représentant la fonction f sur $[-\pi + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$? $(k \in \mathbb{Z})$.

Exercice 5
On considère la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par

$$f(x) = 2e^x + ax + b$$

On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

1) Déterminer les réels a et b tels que :
– la courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine O ;
– la tangente à $\mathscr{C}$ en O a pour coefficient directeur 3.

2) On prendra pour la suite de l'exercice $f(x) = 2e^x + x - 2$. Dresser le tableau de variation de f.

Question ouverte
Toute réponse, même partielle, sera valorisée lors de la notation. Profitez-en !
Démontrer que, pour tout $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$ on a

$$x \leq \tan x \leq 2x$$