Contrôle de Mathématiques

Correction.

Exercice 1 (lectures graphique)

1) et **2)**. On déduit le tableau de signe de f' du tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	

3) $y = -2x + 5$.

4) $y = \dfrac{1}{2}x + 2$.

5) La droite d'équation $x = 2$ est asymptote en 2^- et en 2^+. La droite d'équation $y = -3$ est asymptote au voisinage de $+\infty$.

6) $(f \circ g)'(0) = g'(0) \times f'(g(0)) = 1 \times f'(0) = 0$.

Exercice 2

1) $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, de même pour la fonction $x \mapsto 2x$, donc $x \mapsto x^2 + 2x$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. De plus elle est à valeur dans $[0;+\infty[$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Donc f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} \sqrt{t} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

3) Pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$f(x) - (x+1) = \sqrt{x^2+2x} - (x+1) = \frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$, et, d'après 2), $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x} = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x+1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)} = 0$, et la droite $y = x+1$ est asymptote au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3

1) **a.** g est dérivable car composée de fonctions dérivables. $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

b. Pour tout $x \in]-\infty; 1]$, $g(x) \leq g(-1) = -1 < 0$ donc g n'est jamais nulle sur cet intervalle. Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, g est strictement croissante, continue, et $g(1) = -5 < 0$, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty > 0$. Donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution, que l'on note α.

Par balayage sur la calculatrice, $\alpha \in [2{,}10; 2{,}11]$.

c.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) **a.** i. Pour tout $x \in]1; +\infty[$, f est dérivable en x et $f'(x) = \dfrac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2-1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2-1)^2} g(x)$.

Or $\dfrac{2x}{(x^2-1)^2} > 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$, donc le signe de $f'(x)$ est le même que le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

ii. D'après 1.c., en sachant que $\alpha > 1$,

x	1		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x^3+3}{x+1} \times \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{5}{2} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$.

iii. Il est souvent plus simple de montrer qu'une valeur est nulle. Ainsi

$$f(\alpha) - 3\alpha = \frac{2\alpha^3+3}{\alpha^2-1} - \frac{3\alpha(\alpha^2-1)}{\alpha^2-1} = \frac{2\alpha^3 + 3 - 3\alpha^3 + 3\alpha}{\alpha^2-1} = \frac{-\alpha^3+3\alpha+3}{\alpha^2-1} = \frac{g(\alpha)}{\alpha^2-1} = 0$$

Donc $f(\alpha) = 3\alpha$. Or, d'après 1.b., $2{,}10 \leq \alpha \leq 2{,}11$. Donc, en multipliant par $3 > 0$ cet encadrement,

$$6{,}30 \leq f(\alpha) \leq 6{,}33$$

b. i. Pour tout $x \in]1; +\infty[$,

$$2x + \frac{2x+3}{x^2-1} = \frac{2x(x^2-1) + 2x + 3}{x^2-1} = f(x)$$

ii. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (2x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x^2} = 0$. Donc la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe représentant f au voisinage de $+\infty$.

De plus, pour tout $x > 1$, on a $x^2 > 1$ et $2x + 3 > 0$. Donc $f(x) - 2x = \dfrac{2x+3}{x^2-1} > 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$, et la courbe est au-dessus de l'asymptote.

iii. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ donc la droite $x = 1$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de 1^+.