Contrôle de mathématiques

Exercice 1 (cours)

1) Donner l'écriture paramétrique d'un cercle de rayon $R \in \mathbb{R}_+$ et de centre $\Omega(\omega)$.

2) Donner l'écriture complexe $z' = f(z)$ des transformations suivantes :

a) Translation de vecteur $\overrightarrow{u}(1+2i)$ **b)** Rotation de centre $\Omega(2-2i)$ et d'angle $\alpha = 3\pi/4$

c) Homothétie de centre $\Omega(2i)$ et de rapport $k = 3$.

3) Décrire les transformations suivantes :

a) $z' = 3z + 2i$ **b)** $z' = z - 3 + i$ **c)** $z' = -iz + 3$ **d)** $z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$

Exercice 2

I. Rappels

1) Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

2) Un nombre complexe z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.

3) Pour tout nombre complexe z, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On se propose de démontrer, à l'aide des nombres complexes, que tout triangle de sommets A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respective a, b, c, et dont le centre du cercle circonscrit est situé à l'origine O, a pour orthocentre le point H d'affixe $a + b + c$.

II. Étude d'un cas particulier

On pose : $a = 3 + i$, $b = -1 + 3i$, $c = -\sqrt{5} - i\sqrt{5}$.

1) Vérifier que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2) Placer les points A, B, C et le point H d'affixe $a + b + c$, puis vérifier graphiquement que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

III. Étude du cas général.

ABC est un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit, et a, b, c sont les affixes respectives des points A, B, C.

1) Justifier le fait que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC si et seulement si :

$$a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c}.$$

2) On pose $w = \overline{b}c - b\overline{c}$.

a) En utilisant la caractérisation d'un nombre imaginaire pur rappelée dans le I., démontrer que w est imaginaire pur.

b) Verifier l'égalité : $(b + c)\left(\overline{b} - \overline{c}\right) = w$ et justifier que : $\dfrac{b + c}{b - c} = \dfrac{w}{|b - c|^2}$.

c) En déduire que le nombre complexe $\dfrac{b + c}{b - c}$ est imaginaire pur.

3) Soit H le point d'affixe $a + b + c$.

a) Exprimer en fonction de a, b et c les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

b) Prouver que $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif quelconque.

(On admet de même que $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BH}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$).

c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

Exercice 3