Mathématiques

Correction

Attention, ces corrections viennent du site de l'APMEP.

Exercice 1 (5 points)

1) F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 2 ; 1), H(0 ; 2 ; 1)

2) **a)** Le volume V est égal à : $\dfrac{\mathcal{A}_{\text{FGH}} \times \text{AE}}{3}$.

FGH est un triangle rectangle en G, donc $\mathcal{A}_{\text{FGH}} = \dfrac{\text{FG} \times \text{GH}}{2} = \dfrac{2 \times 1}{2} = 1$ et comme AE $= 1$, $\boxed{V = \dfrac{1 \times 1}{3} = \dfrac{1}{3}}$.

b) On a I(0 ; 1 ; 0), $\overrightarrow{\text{FI}} = (-1\ ;\ 1\ ;\ -1)$, $\overrightarrow{\text{IH}}(0;\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $\overrightarrow{\text{FI}} \cdot \overrightarrow{\text{IH}} = 0 + 1 - 1 = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux donc (FI) et (IH) sont perpendiculaires en I. En prenant comme base le triangle FIH, V $= \dfrac{\text{FIH} \times d}{3}$, où d est la distance du point G au plan (FIH). Le triangle FIH étant rectangle en I, son aire est égale à $\dfrac{\text{FI} \times \text{IH}}{2}$.

- $\text{FI}^2 = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow \text{FI} = \sqrt{3}$;
- $\text{IH}^2 = 0 + 1 + 1 = 2 \Rightarrow \text{IH} = \sqrt{2}$.

Ainsi $\mathcal{A}_{\text{FIH}} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

En conclusion : $V = \dfrac{1}{3}$ d'après **a)** et $V = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\sqrt{6}}{2} \times d$. Donc $\boxed{d = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}}$.

3) **a)** On calcule : $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{FI}} = -2 + 1 + 1 = 0$, et $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\text{IH}} = 0 + 1 - 1 = 0$.

Ainsi $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (FIH), donc $\boxed{\overrightarrow{n} \text{ est orthogonal à ce plan}}$

b) L'équation du plan (FIH) est donc de la forme : $2x + 1y - 1z + d' = 0$.

Comme F $\in$ (FIH) ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus soit $0 + 1 - 0 + d' = 0$, donc $d' = -1$. Une équation du plan (FIH) est donc :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{FIH}) \iff \boxed{2x + y - z - 1 = 0}$$

c) On sait que la distance d de G au plan (FIH) est :

$$d = \frac{|2x_{\text{G}} + y_{\text{G}} - z_{\text{G}} - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 2 - 1 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

On retrouve la même valeur qu'au **2. b.**

4) **a)** La droite (AG) est perpendiculaire au plan (FIH) si et seulement si $\overrightarrow{\text{AG}}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$. Or $\overrightarrow{\text{AG}}(1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ n'est manifestement pas colinéaire à $\overrightarrow{n}$, les coordonnées n'étant pas proportionnelles.

b) $M(x\ ;\ ;y\ ;\ z) \in (\text{AG}) \iff \overrightarrow{\text{A}M} = \alpha\overrightarrow{\text{AG}}$ qui se traduit par :

$$M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (\text{AG}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2t \\ z & = & t \end{array}\right.$$

c) Remplaçons les coordonnées de $M(t, 2t, t) \in (AG)$ dans l'équation du plan (FIH) :

$$2t + 2t - t - 1 = 0 \iff 3t = 1 \iff t = \frac{1}{3}$$

Les coordonnées de K sont donc $\boxed{\left(\frac{1}{3}\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right).}$

5) Le rayon de la sphère est GK.

Or $\text{GK}^2 = \frac{4}{9} + \frac{16}{9} + \frac{4}{9} = \frac{24}{9} \Rightarrow \text{GK} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Or la distance d de G au plan (FIH) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$; elle est donc inférieure au rayon de la sphère et par conséquent $\boxed{\text{la section de la sphère par le plan (FIH) est un cercle.}}$

Exercice 2 (5 points)

A - Étude d'une fonction

1) La fonction f est le produit de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$: elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \text{e}^{-x} - (x+1)\text{e}^{-x} = -x\text{e}^{-x}$ qui est du signe de $-x$, puisque $\text{e}^{-x} > 0$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.
La fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}^-$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Le maximum est obtenu pour $x = 0$, $f(0) = 1 \times \text{e}^{-0} = 1$.
Limites :

- $f(x) = x\text{e}^{-x} + \text{e}^{-x}$.
  Par croissance comparée et par produit et somme de limites : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \text{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

2) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment. Voir ci-dessous

B - Étude d'une famille de fonctions

1) **a)** On a $f_0(x) = x + 1$: c'est une fonction affine

b) Les points communs à $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$ ont des coordonnées qui vérifient : $y = x+1$ et $y = (x+1)\text{e}^x$, ce qui nous donne l'égalité $x + 1 = (x+1)\text{e}^x$. Résolvons.

$$x + 1 = (x+1)\text{e}^x \iff (x+1)\left(\text{e}^x - 1\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} x+1 & = & 0 \\ \text{e}^x - 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 \\ \text{e}^x & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 \\ x & = & 0 \end{array}\right.$$

On a donc deux points commune : le point $(0\,;\,1)$ et le point $(-1\ ;\ 0)$.
On remarque que quel que soit k, $f_k(-1)=0$, donc le point $(-1\ ;\ 0)$ appartient à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$.
De même, quel que soit k, $f_k(0)=1$, donc le point $(0\,;\,1)$ appartient à toutes les courbes $\mathcal{C}_k$.

2) Tableau de signes :

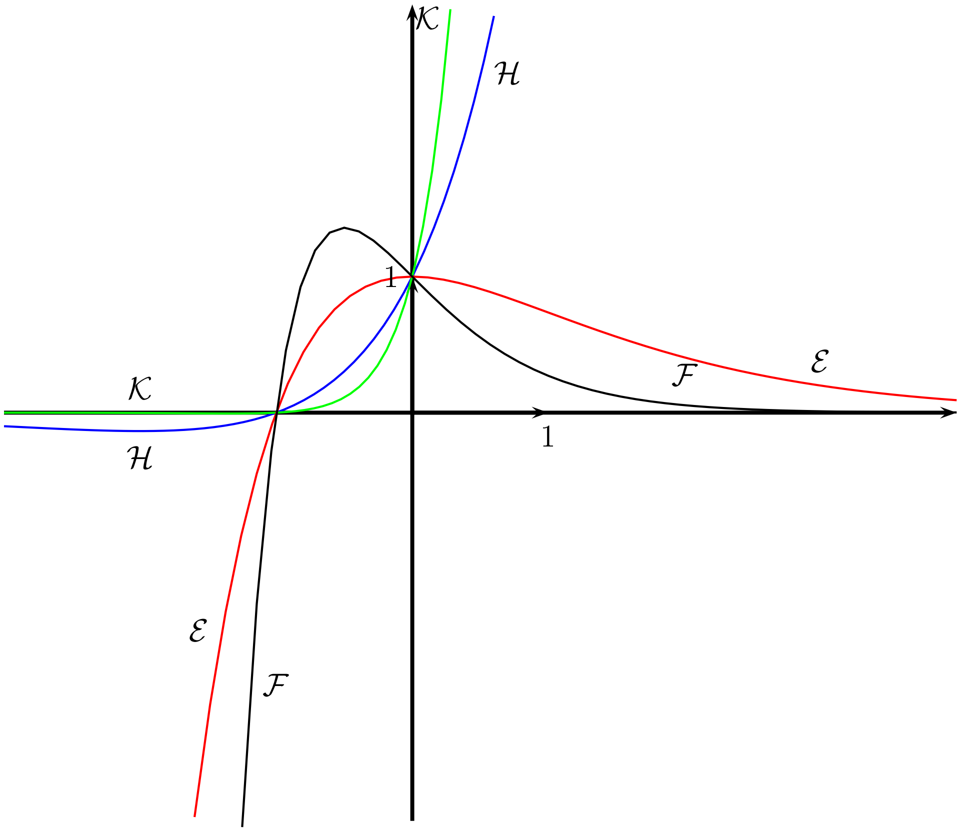
x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x+1$	$-$	0 $+$		$+$
e^x-1	$-$	$-$	0	$+$
$(x+1)\left(\mathrm{e}^x-1\right)$	$+$	0 $-$	0	$+$

On a donc :
$f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)\mathrm{e}^{(k+1)x}-(x+1)\mathrm{e}^{kx}=(x+1)\mathrm{e}^{kx}\left(\mathrm{e}^x-1\right)$ qui est du signe du produit ci-dessus car $\mathrm{e}^{kx}>0$ quel que soit $x\in\mathbb{R}$. On en déduit que :
- pour $x<-1$ et pour $x>0$, $\mathcal{C}_{k+1}$ est au dessus de $\mathcal{C}_k$
- pour $-1<x<0$, $\mathcal{C}_{k+1}$ est au dessous de $\mathcal{C}_k$
- les deux courbes se coupent en $x=-1$ et en $x=0$.

f_k produit de fonction dérivable est dérivable et $f'_k(x)=\mathrm{e}^{kx}+k(x+1)\mathrm{e}^{kx}=\mathrm{e}^{kx}(kx+k+1)$.
Comme $\mathrm{e}^{kx}>0$ quel que soit x et quel que soit k, le signe de $f'_k(x)$ est celui de $kx+k+1$.

- Si $k>0$, alors $kx+k+1=0\iff x=-\dfrac{k+1}{k}$, donc $f'_k(x)>0$ si $x>-\dfrac{k+1}{k}$, donc la fonction est croissante sur cet intervalle et $f'_k(x)<0$ si $x<-\dfrac{k+1}{k}$, donc la fonction est décroissante sur cet intervalle.
- Si $k<0$, alors $kx+k+1=0\iff x=-\dfrac{k+1}{k}$.
  $f'_k(x)>0\iff kx+k+1>0\iff k+1>-kx\iff x<-\dfrac{k+1}{k}$. La fonction f_k est donc croissante sur $\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{k+1}{k}\right[$ et décroissante sur $\left]-\dfrac{k+1}{k}\ ;\ +\infty\right[$.

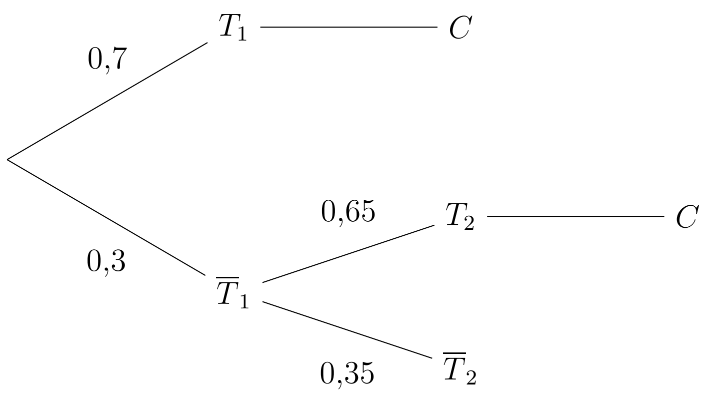
3) En utilisant la question précédente, on peut dire que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ correspondent à des valeurs de k négatives.
Plus précisement la courbe $\mathcal{E}$ croît sur $]-\infty\ ;\ 0[$ ce qui correspond à la valeur $k=-1$.
Donc $\mathcal{E}$ représente la fonction f_{-1} et par conséquent $\mathcal{F}$ représente la fonction f_{-3}.
Pour les valeurs de k positives on utilise les résultats de la question **2.** : pour $x>0$, on constate que que $\mathcal{K}$ est au dessus de $\mathcal{H}$; donc $\mathcal{H}$ représente f_1 et $\mathcal{K}$ représente f_2.



Exercice 3

1) D'après l'énoncé, « le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication », donc $p(T_1) = 0{,}7$.

Pour calculer $p(C)$, modélisons la situation par un arbre.



Après le premier test, les écrans ayant échoués ($\overline{T}_1$) sont réparé, puis de nouveau testés (test « T_2 »). Si ce test échoue ($\overline{T}_2$), l'écran fini à la poubelle. Dès que le test réussi, l'écran est commercialisé.

La lecture de l'arbre nous donne $p(C) = 0{,}7 + 0{,}3 \times 0{,}65 = 0{,}895$.

2) Par définition $p_C(T_1) = \dfrac{p(C \cap T_1)}{p(C)} = \dfrac{0{,}7}{0{,}895}$. Détails : $p(C \cap T_1) = p(T_1)$, tous les écrans vérifiant T_1 ont été commercialisés.

3) Notons A l'évènement « au moins un écran passe le test la première fois ». L'évènement contraire est plus simple à étudier : $\overline{A}$, « aucun écran ne passe le premier test », est l'évènement $\overline{T}_1$ pour chacun des 5 écrans. C'est-à-dire « $\overline{T}_1$ **et** $\overline{T}_1$ **et** $\overline{T}_1$ **et** $\overline{T}_1$ **et** $\overline{T}_1$ ». Or le résultat pour chaque écran est indépendant. Traduisons en calculs.

$$p(\overline{A}) = p(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_1 \cap \overline{T}_1 \cap \overline{T}_1 \cap \overline{T}_1) = p(\overline{T}_1) \times p(\overline{T}_1) \times p(\overline{T}_1) \times p(\overline{T}_1) \times p(\overline{T}_1) = (0{,}3)^5 = 0{,}00243$$

En conclusion, $\boxed{p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0{,}00243 = 0{,}99757}$.

4) Les écrans passant le premier test procurent un « gain » de $a - 1000$; ceux passant le second test un « gain » de $a - 1050$ et les autres un « gain » de -1000.

a) D'où la loi de probabilité :

	1^{er}test	2^{e}test	refusés
$p(X = x_i)$	$0,7$	$0,195$	$0,105$
« gain »	$a - 1000$	$a - 1050$	-1050

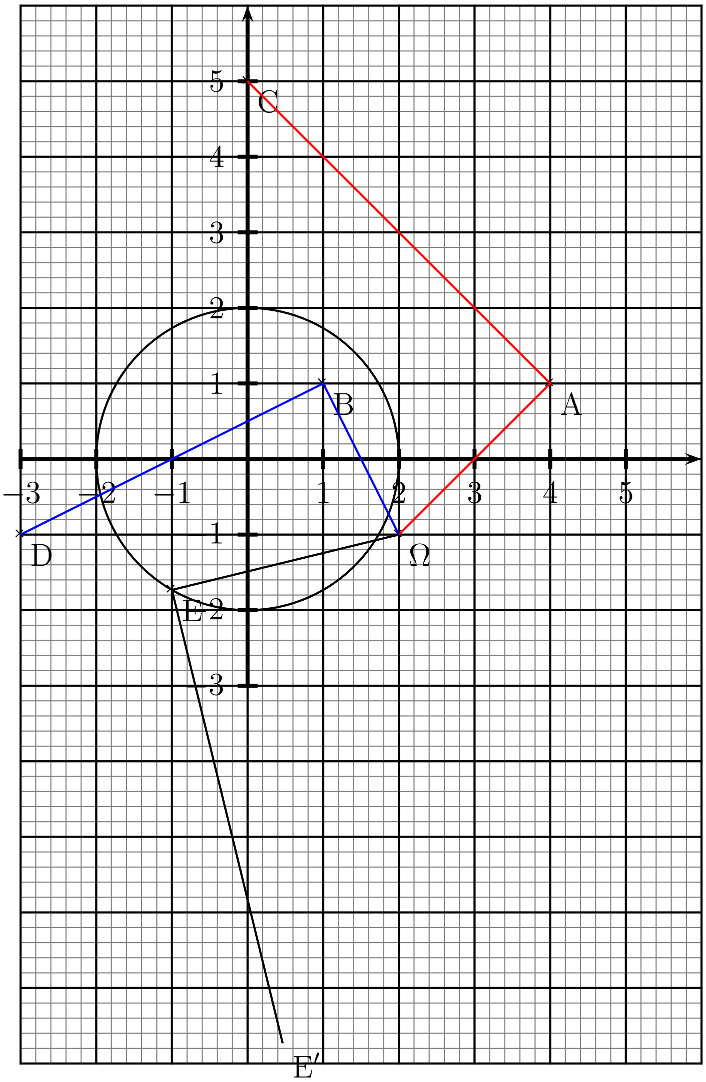
b) $E(X) = 0,7 \times (a - 1000) + 0,195 \times (a - 1050) + 0,105 \times (-1050) =$
$E(X) = 0,895a - 1015$.

c) L'entreprise peut espérer un bénéfice si l'espérance de gain est positive, soit $E(X) \geqslant 0 \iff a \geqslant \dfrac{1015}{0,895} \approx 1134,08$ euros. (à un centime près par excès)

Exercice 4 (5 points)

1) Cf. cours.

2)



3) **a)** On obtient $z_{\text{A}'} = 5\text{i} = z_{\text{C}}$ et $z_{\text{B}'} = -3 - 3\text{i} = z_{\text{D}}$.

b) $M(z)$ est invariant par f si et seulement si $z' = z = (1 + 2\text{i})z - 2 - 4\text{i} \iff 2\text{i}z = 2 + 2\text{i} \iff z = 2 - \text{i}$. L'équation ayant une seule solution, f a un seul point invariant Ω d'affixe $\omega = 2 - \text{i}$.

4) **a)** On a $z' - z = 2\text{i}z - 2 - 4\text{i} = -2\text{i}(2 - \text{i} - z)$.

b) En prenant le module des deux complexes ci-dessus, on obtient $MM' = |-2\mathrm{i}| \times \Omega M$ et si $\Omega \neq M$, $\dfrac{MM'}{\Omega M} = 2$.

L'égalité trouvée au a peut, si $\Omega \neq M$, s'écrire $\dfrac{z'-z}{2-\mathrm{i}-z} = -2\mathrm{i}$. En prenant les arguments de ces deux complexes, on obtient $\left(\overrightarrow{M\Omega},\ \overrightarrow{MM'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

c) On en déduit que le triangle $\Omega MM'$ est un triangle rectangle en M.

d) On a $|z_{\mathrm{E}}|^2 = 1+3 = 4 = 2^2$.

Donc $z_{\mathrm{E}} = 2\left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Pour placer le point E, il suffit de construire le cercle de centre O et de rayon 2. Le point E est le point de ce cercle d'abscisse 1.

D'après les questions b et c on a $\mathrm{EE}' = 2\Omega\mathrm{E}$ et $\left(\overrightarrow{E\Omega},\ \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. On construit donc la perpendiculaire en E à la droite (EΩ) et on place sur cette droite le point E$'$ tel que $\mathrm{EE}' = 2\Omega\mathrm{E}$ et $\left(\overrightarrow{E\Omega},\ \overrightarrow{EE'}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.