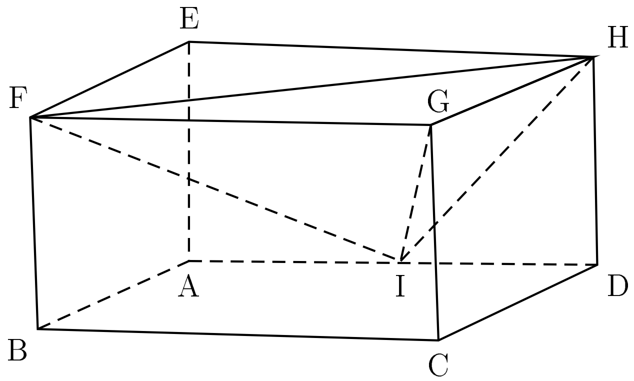
# Mathématiques

NOM : GROUPE :
PRÉNOM :

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation de votre copie. **Soulignez vos résultats.**
Les calculatrices sont autorisées.

Durée : *4 heures.*

**Exercice 1 (5 points)**
**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**
Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit ABCDEFGH tel que : $AB = 1$, $AD = 2$ et $AE = 1$.
On appelle $I$ le milieu de $[AD]$.




L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A\ ;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\ ;\overrightarrow{\mathrm{AI}}\ ;\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

**1)** Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H.

**2)** **a)** Montrer que le volume V du tétraèdre GFIH est égal à $\dfrac{1}{3}$.

**b)** Montrer que le triangle FIH est rectangle en I.
En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance $d$ du point G au plan (FIH).

**3)** Soit le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(2\ ;1\ ;-1)$.

**a)** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (FIH).

**b)** En déduire une équation cartésienne du plan (FIH).

**c)** Retrouver par une autre méthode la distance $d$ du point G au plan (FIH).

**4)** **a)** La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

**b)** Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

**c)** Déterminer les cordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH).

**5)** *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
Soit $\Gamma$ la sphère de centre G passant par K.
Quelle est la nature de l'intersection de $\Gamma$ et du plan (FIH) ?
(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection)

**Exercice 2 (5 points)**
**A - Étude d'une fonction**
On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $(\mathcal{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

**1)** *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.*

Étudier les variations de la fonction $f$ et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau dc variations le plus complet possible.

**2)** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

**B - Étude d'une famille de fonctions**

Pour tout entier relatif $k$, on note $f_k$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}.$$

On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de la fonction $f_k$ dans un repère orthonormal du plan.
On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $\mathcal{C}_{-1} = \mathcal{C}$.

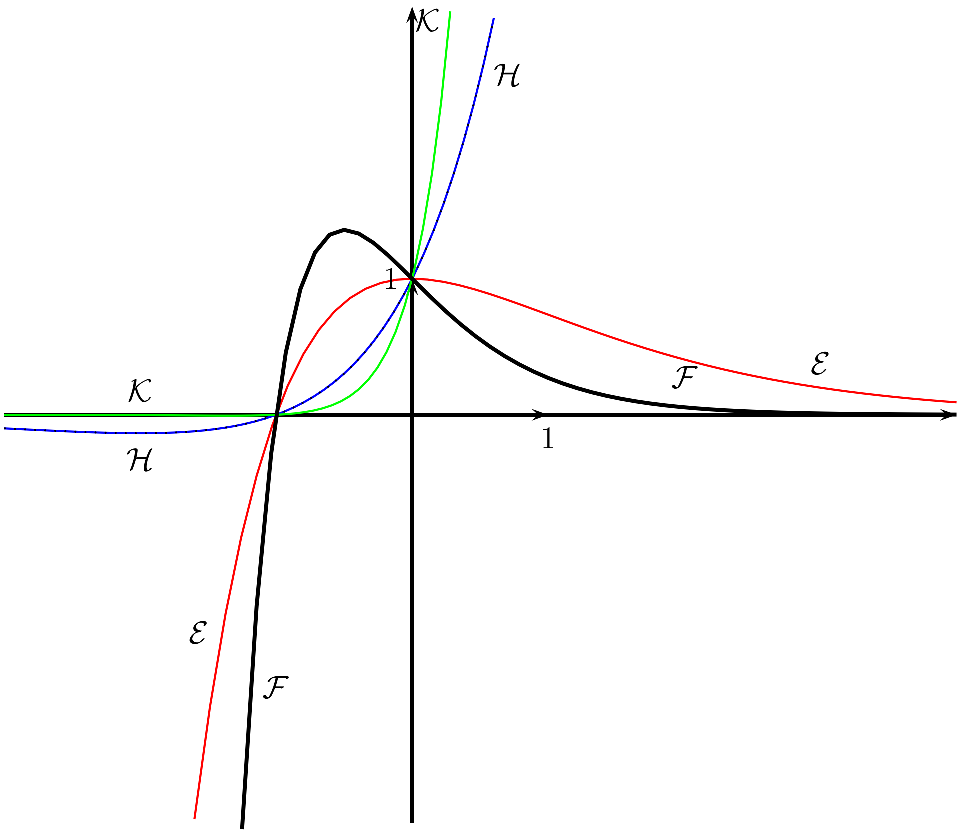
**1)** **a)** Quelle est la nature de la fonction $f_0$ ?

**b)** Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$.
Vérifier que, pour tout entier $k$, ces points appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_k$.

**2)** Étudier, suivant les valeurs du réel $x$, le signe de l'expression : $(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)$.
En déduire, pour $k$ entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.

**3)** Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel $x$ et pour tout entier $k$ non nul.
En déduire le sens de variation de la fonction $f_k$ suivant les valeurs de $k$. (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

**4)** Le graphique suivant représente quatre courbes $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$, et $\mathcal{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre $k$, parmi les entiers $-1$, $-3$, $1$ et $2$.
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.




**Exercice 3 ( points)**

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.
Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.
Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis

directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.
On note $T_1$ l'évènement : « le premier test est positif ».
On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

**1)** On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
Déterminer les probabilités $p(T_1)$, et $p(C)$.

**2)** Calculer $p_C(T_1)$.

**3)** On choisit 5 écrans au hasard, quelle est la probabilité qu'au moins un écran passe le test la première fois ?

**4)** La fabrication d'un écran revient à 1 000 euros au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
Cela lui coûte 50 euros de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
Un écran est facturé $a$ euros ($a$ étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire $X$ qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

- **a)** Déterminer la loi de probabilité de $X$ en fonction de $a$.
- **b)** Exprimer l'espérance de $X$ en fonction de $a$.
- **c)** À partir de quelle valeur de $a$, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

**Exercice 4 (5 points)**
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

**1)** *Question de cours*
On rappelle que : « Pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ non nul, d'affixe $z$ on a : $|z| = \|\overrightarrow{w}\|$ et $\arg(z) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$ ».
Soient $M$, $N$ et $P$ trois points du plan, d'affixes respectives $m$, $n$ et $p$ tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

- **a)** Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$.
- **b)** Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

**2)** On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 4 + \text{i}, \quad z_{\text{B}} = 1 + \text{i}, \quad z_{\text{C}} = 5\text{i} \text{ et } z_{\text{D}} = -3 - \text{i}.$$

Placer ces points sur une figure.

**3)** Soit $f$ l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que :

$$z' = (1 + 2\text{i})z - 2 - 4\text{i}.$$

- **a)** Préciser les images des points A et B par $f$.
- **b)** Montrer que $f$ admet un unique point invariant $\Omega$, dont on précisera l'affixe $\omega$.

**4)**
- **a)** Montrer que pour tout nombre complexe $z$, on a :

$$z' - z = -2\text{i}(2 - \text{i} - z).$$

- **b)** En déduire, pour tout point $M$ différent du point $\Omega$, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'}\right)$
- **c)** Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$ ?
- **d)** Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = -1 - \text{i}\sqrt{3}$. Écrire $z_{\text{E}}$ sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E′ associé au point E.