
Mathématiques

NOM :

GROUPE :

PRÉNOM :

Spécialité maths

Le soin, la clarté et la précision de la rédaction sont des éléments importants d'appréciation de votre copie. **Soulignez vos résultats.**

Les calculatrices sont autorisées.

Durée : 4 heures.

Exercice 1 (Liban — juin 2008 — 6 points)

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers plus l'infini.

« une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2$$

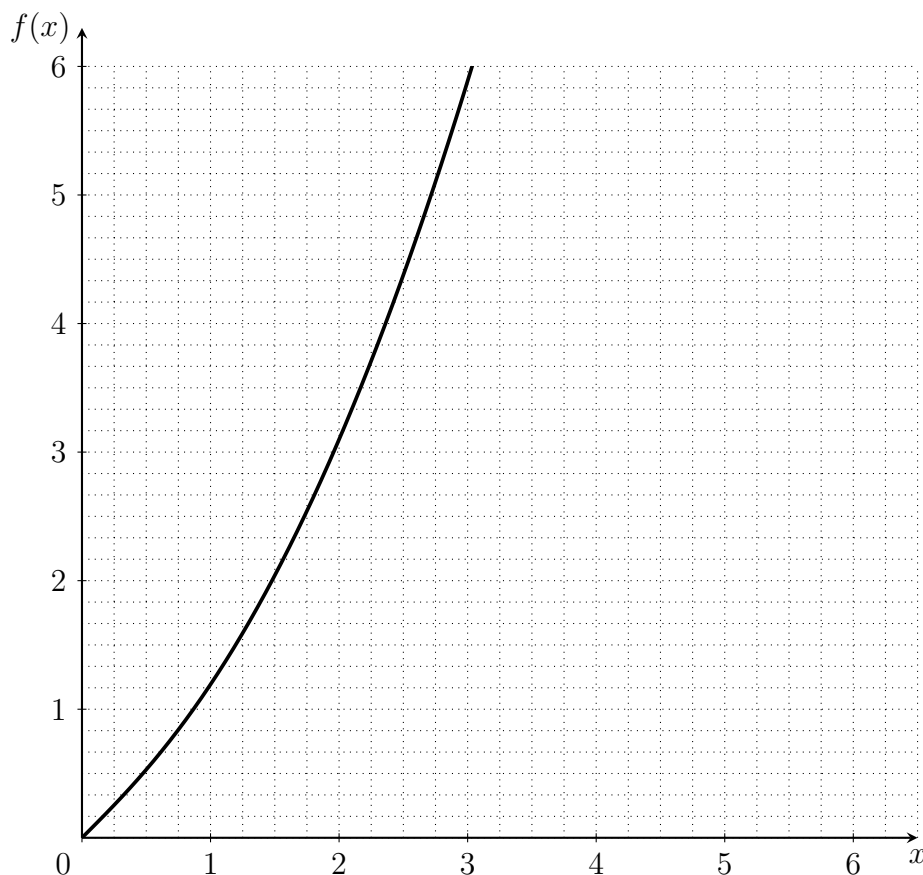
La courbe (\mathcal{C}) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

- 1) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
- 2) Déterminer une équation de la tangente (\mathcal{T}) à la courbe (\mathcal{C}) au point d'abscisse 0.
- 3) Tracer la droite (\mathcal{T}) sur le graphique. Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la courbe (\mathcal{C}) est située au dessus de la droite (\mathcal{T}).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- 1) Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction



- 2) À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?

- 3) a) Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.
 b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
 c) (question ouverte) Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
 d) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 2 (5,25 points)

Pour chacune des questions, quatre propositions sont proposées dont une seule est exacte.

Pour chacune des questions donner, sans justification, la bonne réponse sur votre copie.

Une bonne réponse donne 0,75 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point et l'absence de réponse est comptée 0 point.

Tout total négatif est ramené à zéro.

Partie A

Soit $v = (v_n)_{n \geq 0}$ une suite. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par

$$u_n = e^{-v_n} + 1$$

- 1) a est un réel strictement positif et \ln désigne la fonction logarithme népérien.
 Si $v_0 = \ln a$ alors :
 a) $u_0 = \frac{1}{a} + 1$ b) $u_0 = \frac{1}{1+a}$ c) $u_0 = -a + 1$ d) $u_0 = e^{-a} + 1$
- 2) Si v est strictement croissante, alors :
 a) u est strictement décroissante et majorée par 2
 b) u est strictement croissante et minorée par 1
 c) u est strictement croissante et majorée par 2
 d) u est strictement décroissante et minorée par 1
- 3) Si v diverge vers $+\infty$, alors :
 a) u converge vers 2 b) u diverge vers $+\infty$
 c) u converge vers 1 d) u converge vers un réel ℓ tel que $\ell > 1$
- 4) Si v est majorée par 2, alors :
 a) u est majorée par $1 + e^{-2}$ b) u est minorée par $1 + e^{-2}$
 c) u est majorée par $1 + e^2$ d) u est minorée par $1 + e^2$

Partie B

- 5) Soit $a \in]0; +\infty[$ fixé. La fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a^x$ a pour dérivée :
 a) $f'(x) = xa^{x-1}$ b) $f'(x) = e^a a^x$ c) $f'(x) = (\ln a)a^x$ d) $f'(x) = e^a a^{x-1}$
- 6) À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \frac{z - 4i}{z + 2}$.
 L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :
 a) un cercle de rayon 1 b) une droite
 c) une droite privée d'un point d) un cercle privé d'un point
- 7) Les notations sont les mêmes qu' à la question précédente.
 L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :
 a) un cercle b) une droite
 c) une droite privée d'un point d) un cercle privé d'un point

Exercice 3 (France — juin 2009 — 5 points)

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

- 1) a) Déterminer l'ensemble des couples (x, y) de nombres entiers relatifs, solution de l'équation

$$(E) \quad 8x - 5y = 3$$

- b) Soit m un nombre entier relatif tel qu'il existe un couple (p, q) de nombres entiers vérifiant $m = 8p + 1$ et $m = 5q + 4$.

Montrer que le couple (p, q) est solution de l'équation (E) et en déduire que $m \equiv 9 \pmod{40}$.

- c) Déterminer le plus petit de ces nombres entiers m supérieurs à 2 000.

- 2) a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1 \pmod{7}$.

- b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

- 3) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.

On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.

On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

- a) Vérifier que $10^3 \equiv -1 \pmod{7}$.

- b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 4 (Centres étrangers — juin 2009 — 4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, on pourra donner un contre-exemple.

- 1) Pour tout complexe z , $\operatorname{Re}(z^2) = (\operatorname{Re}(z))^2$.

- 2) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Pour tout nombre complexe z non nul, les points M d'affixe z , N d'affixe \bar{z} et P d'affixe $\frac{z^2}{\bar{z}}$ appartiennent à un même cercle de centre O .

- 3) Pour tout nombre complexe z , si $|1 + iz| = |1 - iz|$, alors la partie imaginaire de z est nulle.

- 4) Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Quels que soient les nombres complexes z et z' non nuls, d'images respectives M et M' dans le plan complexe, si z et z' vérifient l'égalité $|z + z'| = |z - z'|$, alors les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires.