Exercices : Révisions

Exercice 1 (France septembre 2005)
Mademoiselle Z travaille dans une société spécialisée dans la vente par téléphone. Chaque jour, elle doit appeler une liste de clients pour leur proposer un produit particulier. Après avoir observé un grand nombre d'appels de Mademoiselle Z, on peut faire l'hypothèse suivante :
- si un client contacté répond favorablement (situation A), cela donne de l'assurance à Mademoiselle Z et elle arrive à convaincre le client suivant une fois sur deux ;
- si le client contacté ne répond pas favorablement (situation B), Mademoiselle Z se décourage et n'arrive à convaincre le client suivant qu'une fois sur cinq.

1) **a.** Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B.

b. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2) Ce lundi, Mademoiselle Z est en forme et elle a convaincu le premier client d'acheter le produit proposé. La matrice ligne décrivant l'état initial au premier appel est donc $P_0 = (1\ ;\ 0)$. Donner la matrice ligne P_1 exprimant l'état probabiliste au deuxième appel.

3) On donne la matrice $M^5 = \begin{pmatrix} 0{,}287\,45 & 0{,}712\,55 \\ 0{,}285\,02 & 0{,}714\,98 \end{pmatrix}$

a. Calculer le produit P_0M^5. En déduire la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client ce lundi.

b. Quelle aurait été la probabilité que Mademoiselle Z convainque son sixième client si elle n'avait pas convaincu le premier ?

4) Déterminer l'état stable du système. Comment peut-on l'interpréter ?

Exercice 2 (Amérique du Sud novembre 2005)
Au 1$^{\text{er}}$ janvier 2000, la population d'une ville se répartit également entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour raisons familiales ou professionnelles, 10 % des propriétaires deviennent locataires tandis que 20 % des locataires deviennent propriétaires.

1) On désigne par p_n la probabilité qu'un habitant de la ville choisi au hasard, soit propriétaire au 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2000+n (n entier supérieur ou égal à 0), et par l_n, la probabilité qu'il soit locataire.
La matrice $P_0 = (0,5\ \ 0,5)$ traduit l'état probabiliste initial et la matrice $P_n = (p_n\ \ l_n)$ (avec, pour tout n de $\mathbb{N}$, $p_n + l_n = 1$) l'état probabiliste après n années.

a. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste et en déduire que ce graphe a pour matrice de transition $\text{M} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

b. Calculer l'état probabiliste P_1.

c. Déterminer l'état stable du graphe. Que peut-on en conclure pour la population de cette ville ?

2) À l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times \text{M}$, démontrer que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,7p_n + 0,2$.

3) On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = p_n - \dfrac{2}{3}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,7$.

b. Exprimer u_n en fonction de n et démontrer que $p_n = -\frac{1}{6} \times 0,7^n + \frac{2}{3}$.

c. Calculer la limite de la suite (p_n) et retrouver le résultat de la question 1. c.

Exercice 3 (Pondichéry 3 avril 2006)

Pendant la saison estivale, deux sociétés de transport maritime ont l'exclusivité de l'acheminement des touristes entre deux îles du Pacifique. On admet que le nombre de touristes transportés pendant chaque saison est stable.

La société « Alizés » a établi une enquête statistique sur les années 2001 à 2005 afin de prévoir l'évolution de la capacité d'accueil de ses navires.

L'analyse des résultats a conduit au modèle suivant : d'une année sur l'autre, la société « Alizés », notée A, conserve 80 % de sa clientèle et récupère 15 % des clients de la société concurrente, notée B.

Pour tout entier naturel n, on note pour la saison $(2005 + n)$:

- a_n la probabilité qu'un touriste ait choisi la société Alizés (A),
- b_n la probabilité qu'un touriste ait choisi l'autre société de transport (B),
- $P_n = (a_n \quad b_n)$, la matrice traduisant l'état probabiliste, avec $a_n + b_n = 1$.

Les résultats pour les probabilités seront arrondies à 10^{-4}.

1) **a.** Modéliser le changement de situation par un graphe probabiliste de sommets nommés A et B.

b. On note M la matrice de transition de ce graphe. Recopier et compléter sur la copie la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 0,8 & \dots \\ 0,15 & \dots \end{pmatrix}$

c. En 2005, la société « Alizés » a transporté 45 % des touristes. On a donc $a_0 = 0,45$.

i. Calculer la probabilité qu'un touriste choisisse la société « Alizés » en 2006.

ii. Déterminer la matrice P_2 et interpréter ces résultats.

d. Soit $P = (a \quad b)$ avec a et b deux réels positifs tels que $a + b = 1$.

i. Déterminer a et b tels que $P = P \times M$.

ii. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

iii. Interpréter ce résultat.

e. On admet qu'en 2015, la probabilité qu'un touriste choisisse la société A est $\frac{3}{7}$. On interroge quatre touristes choisis au hasard ; les choix des touristes sont indépendants les uns des autres.

Determiner la probabilité qu'au moins un des quatre touristes choisisse la société « Alizés » pour ses vacances en 2015.

Exercice 4 (Amérique du Nord 31 mai 2006)

Dans une entreprise, lors d'un mouvement social, le personnel est amené à se prononcer chaque jour sur l'opportunité ou non du déclenchement d'une grève.

Le premier jour, 15 % du personnel souhaite le déclenchement d'une grève. À partir de ce jour-là :

- parmi ceux qui souhaitent (e déclenchement d'une grève un certain jour, 35 % changent d'avis le lendemain.
- parmi ceux qui ne souhaitent pas le déclenchement d'une grève un certain jour, 33 % changent d'avis le lendemain.

On note :

- g_n la probabilité qu'un membre du personnel souhaite le déclenchement d'une grève le jour n,
- t_n la probabilité qu'un membre du personnel ne souhaite pas le déclenchement d'une grève le jour n,
- $P_n = (g_n \quad t_n)$, la matrice qui traduit l'état probabiliste au n-ième jour.

1) Déterminer l'état initial P_1.

2) **a.** Tracer un graphe probabiliste traduisant les données de l'énoncé.

b. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe.

3) Calculer le pourcentage de personnes favorables à la grève le 3^er jour.

4) Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable (on rappelle que $x + y = 1$).

a. Montrer que x et y vérifient l'équation $x = 0,65x + 0,33y$.

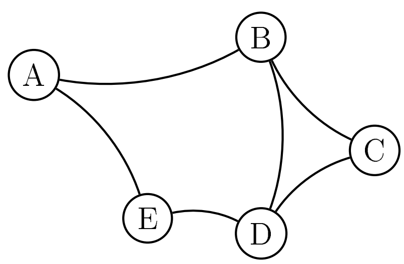
b. Déterminer x et y (on arrondira les résultats à 10^{-3} près).

c. Interpréter le résultat.

Exercice 5 (Liban mai 2006)

1) Dans un parc, il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées.
On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D, E et les allées par les arêtes du graphe G ci-dessous :

Graphe G

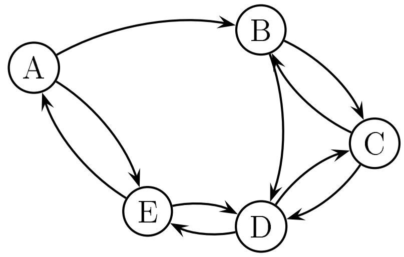


a. On désire peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes.
Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires et justifier.
Déterminer ce nombre.

b. Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée ?

2) Une exposition est organisée dans le parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation : certaines allées deviennent à sens unique, d'autres restent à double sens. Par exemple la circulation dans l'allée située entre les bancs B et C pourra se faire de B vers C et de C vers B, alors que la circulation dans l'allée située entre les bancs A et B ne pourra se faire que de A vers B. Le graphe G′ ci-dessous modélise cette nouvelle situation :

Graphe G′



a. Donner la matrice M associée au graphe G′. (On ordonnera les sommets par ordre alphabétique).

b. On donne $\mathrm{M}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B ?
Les donner tous.

c. Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A.
Quel est ce cycle ?
En est-il de même pour le sommet B ?

Exercice 6 (Antilles-Guyane juin 2006)

Un jardinier doit décorer un jardin privatif en répartissant 10 variétés de fleurs notées V_1 à V_{10} dans différents parterres. Certaines de ces variétés ne peuvent pas être plantées ensemble pour des raisons diverses (tailles, couleurs, conditions climatiques, ...) et ces incompatibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous (une croix indique qu'il y a incompatibilité entre deux variétés).

Fleur	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}
V_1			×			×				×
V_2			×	×	×			×		
V_3	×	×		×		×				
V_4		×	×		×			×	×	
V_5		×		×			×	×		
V_6	×		×				×			
V_7					×	×				
V_8		×		×	×					
V_9				×						×
V_{10}	×								×	

1) Représenter par son graphe G la situation

2) **a.** Trouver un sous-graphe complet d'ordre 4 et le dessiner.

b. Que peut-on en déduire pour la coloration du graphe G ?
Quel est le nombre minimum de parterres que le jardinier doit décorer ?

3) **a.** Classer les sommets de G par ordre de degré décroissant.

b. En déduire un encadrement de C, nombre chromatique de G.

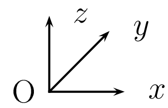
4) **a.** Procéder à la coloration du graphe G.

b. Que peut-on en déduire pour le nombre C ? Justifier avec soin.

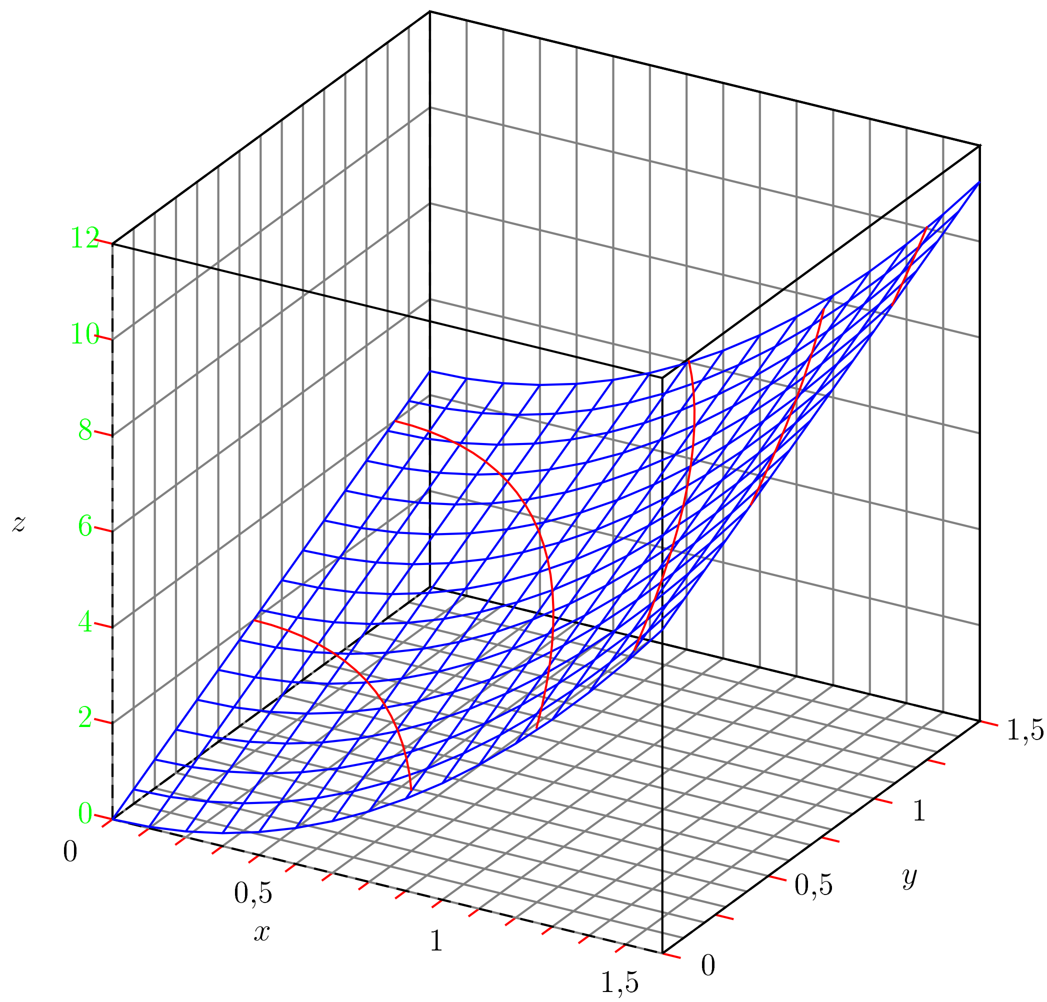
c. Proposer un ensemble de parterres avec une répartition adaptée des variétés de fleurs.

Exercice 7 (Asie, juin 2006)

L'espace est rapporté à un repère orthogonal.



On a représenté ci-dessous la surface (S) d'équation $z = 3(x^2 + y)$, avec x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1,5]$, et y appartenant à l'intervalle $[0; 1,5]$.



Partie A - Exploitation du graphique.

On considère le plan (P) d'équation $z = 6$.

1) Sur la figure donnée, placer le point A de coordonnées $(1\,;1\,;6\,)$.
2) Surlignez en couleur la partie visible de l'intersection de la surface (S) et du plan (P) sur la figure donnée.

Partie B - Recherche d'un coût minimum.

Une entreprise fabrique des unités centrales pour ordinateurs dont les composants sont essentiellement des cartes mères et des microprocesseurs.

On appelle x le nombre (exprimé en milliers) de microprocesseurs produits chaque mois et y le nombre (exprimé en milliers) de cartes mères produites chaque mois.

Le coût mensuel de production, exprimé en milliers d'euros, est donné par :

$$C(x\ ;\ y) = 3\left(x^2 + y\right)$$

On se propose de trouver les quantités de microprocesseurs et de cartes mères que l'entreprise doit produire par mois pour minimiser ce coût.

1) La production mensuelle totale est de deux milliers de composants. On a donc $x + y = 2$. Exprimer $C(x; y)$ en fonction de la seule variable x. On note f la fonction ainsi obtenue. Vérifier que $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$.

2) Montrer que sur l'intervalle $[0 \; ; \; 1,5]$, la fonction f admet un minimum atteint pour $x = 0,5$.

3) Quelles quantités de microprocesseurs et de cartes mères, l'entreprise doit-elle produire chaque mois pour minimiser le coût mensuel de production ? Quel est ce coût ?

4) Placer sur la figure donnée le point K correspondant au coût minimum.

Exercice 8 (Centres étrangers juin 2006)
Les questions 1. et 2. peuvent être traitées de façon indépendante.

1) Dans une région, on considère trois types de temps : beau, variable, pluvieux.
On sait que :
- S'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\dfrac{1}{3}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\dfrac{1}{6}$
- Si le temps est variable, la probabilité qu'il soit variable le lendemain est $\dfrac{1}{4}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\dfrac{1}{2}$
- S'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $\dfrac{1}{4}$ et la probabilité qu'il fasse beau est $\dfrac{1}{2}$

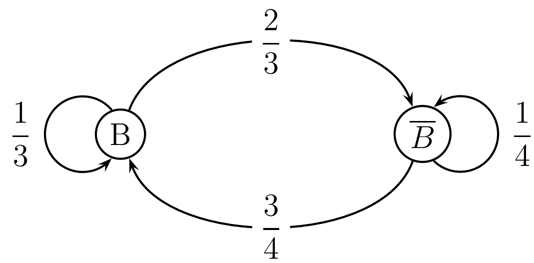
On note
- B : « le temps est beau » ;
- V : « le temps est variable » ;
- P : « le temps est pluvieux ».

a. Représenter la situation par un graphe probabiliste.

b. Donner la matrice de transition de ce graphe. Les sommets B, V, P seront rangés dans cet ordre.

c. Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste dans n jours est défini par la matrice ligne $P_n = (b_n \; v_n \; p_n)$ où b_n désigne la probabilité qu'il fasse beau dans n jours, v_n la probabilité que le temps soit variable dans n jours et p_n la probabilité qu'il pleuve dans n jours. Aujourd'hui il fait beau, on a donc $P_0(1 \; 0 \; 0)$ matrice ligne décrivant l'état initial. Déterminer la probabilité de chaque type de temps dans 2 jours.

2) Dans une autre région, on note B : « il fait beau » $\overline{\text{B}}$: « il ne fait pas beau ».
Les variations du temps sont représentées par le graphe suivant :



a. Donner la matrice de transition T de ce graphe.

b. Soit $Q = (x\ y)$ avec $x + y = 1$.
Déterminer x et y tels que $Q = QT$ et interpréter le résultat.

Exercice 9 (France 15 juin 2006)
Dans une région de France supposée démographiquement stable, on compte 190 milliers d'habitants qui se déplacent en voiture pour aller travailler : les uns se déplacent seuls dans leur voiture, les autres pratiquent le co-voiturage. On admet que :
– si une année un habitant pratique le co-voiturage, l'année suivante il se déplace seul dans sa voiture avec une probabilité égale à $0,6$;
– si une année un habitant se déplace seul dans sa voiture, l'année suivante il pratique le co-voiturage avec une probabilité égale à $0,35$.

Première partie
On note C l'état « pratiquer le co-voiturage » et V l'état « se déplacer seul dans sa voiture ».

1) Dessiner un graphe probabiliste de sommets C et V qui modélise la situation aléatoire décrite.

2) En considérant C et V dans cet ordre, en ligne, la matrice de transition associée à ce (graphe est $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,60 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$. Vérifier que l'état stable du système correspond à la matrice ligne $(70 \quad 120)$.
En donner une interprétation.

Deuxième partie
En 2000, 60 milliers d'habitants pratiquaient le co-voiturage et 130 milliers d'habitants se déplaçaient seuls dans leur voiture.
On appelle X_n (n entier naturel) le nombre de milliers d'habitants qui pratiquent le co-voiturage durant l'année $2000 + n$. On a donc $X_0 = 60$.
On admet que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = 0,05X_n + 66,5$.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout entier naturel n par $U_n = X_n - 70$.

1) Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2) Montrer que pour tout entier naturel n, $X_n = 70 - 10 \times 0,05^n$.
Est-il possible que, durant une année, le nombre d'habitants pratiquant le co-voiturage atteigne la moitié de la population de cette région ?

Exercice 10 (La Réunion juin 2006)
On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 12 \text{ et} \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 5 \quad \text{pour tout entier naturel } n \geqslant 1 \end{cases}$$

1) Utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = \dfrac{1}{3}x + 5$ pour construire les quatre premiers termes de la suite (u_n).
(*Cette construction est à faire sur le graphique de l'annexe* 3 - *exercice* 2 - *Spécialité*)
Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?

2) Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, par : $v_n = u_n - \dfrac{15}{2}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b. Exprimer alors v_n en fonction de n.

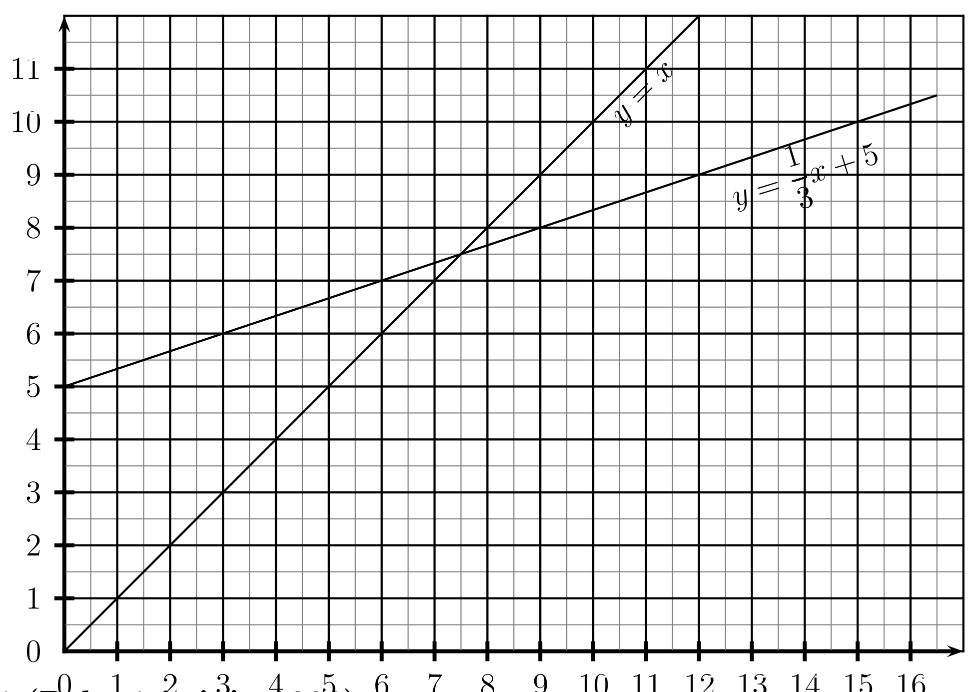
c. Déterminer la limite de la suite (v_n) puis en déduire la limite de la suite (u_n).

3) Est-il possible de déterminer n de sorte que :

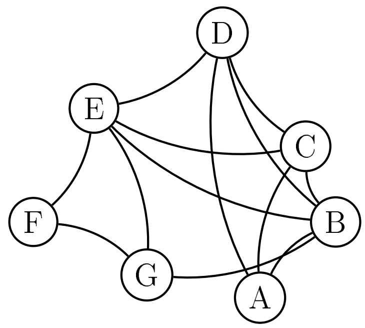
a. $u_n - \dfrac{15}{2} \leqslant 10^{-6}$?

b. $u_n - \dfrac{15}{2} \geqslant 10^{6}$?

ANNEXE 3



Exercice 11 (Polynésie juin 2006)
Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe $\mathcal{G}$ suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



1) Le graphe $\mathcal{G}$ est-il complet ? Quel est l'ordre de $\mathcal{G}$?

2) **a.** Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes.
Proposer un coloriage adapté à cette condition.

b. Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de $\mathcal{G}$?

3) **a.** Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets A, B, C et D ?

b. Quel est le nombre minimal de couleurs que la compagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2. ?

4) **a.** En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, construire la matrice M associée à $\mathcal{G}$.

b. On donne :

$$M^8 = \begin{pmatrix} 6\,945 & 9\,924 & 8\,764 & 8\,764 & 9\,358 & 3\,766 & 5\,786 \\ 9\,924 & 14\,345 & 12\,636 & 12\,636 & 13\,390 & 5\,486 & 8\,310 \\ 8\,764 & 12\,636 & 11\,178 & 11\,177 & 11\,807 & 4\,829 & 7\,369 \\ 8\,764 & 12\,636 & 11\,177 & 11\,178 & 11\,807 & 4\,829 & 7\,369 \\ 9\,358 & 13\,390 & 11\,807 & 11\,807 & 12\,634 & 5\,095 & 7\,807 \\ 3\,766 & 5\,486 & 4\,829 & 4\,829 & 5\,095 & 2\,116 & 3\,181 \\ 5\,786 & 8\,310 & 7\,369 & 7\,369 & 7\,807 & 3\,181 & 4\,890 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de chemins de longueurs 8 qui relient B à D ?

5) **a.** Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois ?

b. Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.

Exercice 12 ()

Exercice 13 (France, septembre 2008)

Dans le cadre de la restructuration de son entreprise, afin de garantir la stabilité du nombre d'emplois, le directeur souhaite qu'à long terme plus de 82% de ses employés ne travaillent que le matin.

Pour cela, il décide que désormais :

- 20% des employés travaillant le matin une semaine donnée travaillent l'après-midi la semaine suivante.
- 5% des employés travaillant l'après-midi une semaine donnée travaillent aussi l'après-midi la semaine suivante.

On note :
A : « L'employé travaille le matin »
B : « L'employé travaille l'après-midi »

1) **a.** Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B.

b. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.

2) La semaine notée 0, semaine de la décision, 60% des employés travaillent le matin et les autres l'après-midi.

a. Donner la matrice ligne notée P_0 décrivant l'état initial des employés dans cette entreprise.

b. Calculer la probabilité qu'un employé travaille le matin lors de la semaine 2, deuxième semaine après la prise de décision,

3) Soit $P = (x \quad y)$ l'état probabiliste stable.

a. Démontrer que x et y vérifient l'égalité $x = 0,8x + 0,95y$.

b. Déterminer x et y.

c. Le souhait du directeur de cette entreprise est-il réalisable ? Justifier la réponse.

4) On admet qu'un an après cette décision la probabilité qu'un employé travaille le matin est égale à $\dfrac{19}{23}$. On choisit alors quatre employés au hasard. Le grand nombre d'employés de l'entreprise permet d'assimiler ces choix à des tirages successifs indépendants avec remise.
Déterminer la probabilité qu'au moins un des quatre employés travaille l'après-midi et donner sa valeur décimale arrondie au millième.