Université Paris Dauphine
Année universitaire 2008-2009
Analyse 3, DUMI2E

Chapitre 5: Séries entières

Exercice 1.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes:

(i) $A(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n n^n}{(2n)!} x^n$, (ii) $B(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} x^n$, (iii) $C(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{sh}(n)^2} x^n$,

(iv) $D(x) = \sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n x^n$, (v) $E(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\ln(1+\frac{1}{n})}\right)^n x^n$, (vi) $F(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n^n}{n!} x^{2n}$,

(vii) $G(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$, où c_n est le nombre de chiffres de n en base 10.

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes en fonction du paramètre $a > 0$:

(i) $A(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!} x^n$, (ii) $B(x) = \sum_{n\geq 0} (a^n - 1) x^n$, (iii) $C(x) = \sum_{n\geq 0} \ln(1 + a^n) x^n$.

Exercice 3.

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes, ainsi que leur somme sur l'intervalle $]-R, R[$.

(i) $A(x) = \sum_{n\geq 0} (2^n + 3^n) x^n$, (ii) $B(x) = \sum_{n\geq 0} (3n+1) x^{3n}$, (iii) $C(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{4n}$,

(iv) $D(x) = \sum_{n\geq 0} \sin(n) x^n$, (v) $E(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{n+1} x^{n+1}$, (vi) $F(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)}{n!} x^n$.

Exercice 4.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence R.

1. a. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_n^2$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ est égal à R^2.

   b. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \sin^2\left(\frac{1}{3^n}\right) x^n$.

2. a. Soit $\forall n \in \mathbb{N}, b_{2n} = a_n$, et $b_{2n+1} = 0$. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ est égal à $\sqrt{R}$.

   b. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) x^{2n}$.

Exercice 5.

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, une série entière de rayon de convergence égal à 1, et

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

1. a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

   b. Soient S_a et S_b, les sommes des séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$. En déduire que

$$\forall x \in D(0,1), S_b(x) = \frac{1}{1-x} S_a(x).$$

2. a. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

   b. En déduire que

$$\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(n+2)x^n = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Exercice 6.

On considère la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière, de sa série dérivée et de sa série dérivée seconde.

2. Calculer la valeur de sa somme S.
   Indication. On pourra commencer par calculer la dérivée seconde de S.

3. En déduire la valeur de

$$I = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}.$$

Exercice 7.

Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière, et calculer leur développement.

(i) $f(x) = e^x \cos(x)$, (ii) $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$, (iii) $h(x) = \frac{2}{x^2-4x+3}$, (iv) $i(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$,

(v) $j(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, (vi) $k(x) = \ln(1+x+x^2)$.

Exercice 8.

Déterminer les solutions développables en série entière des équations différentielles suivantes.

(i) $y' - x^2 y = 0, y(0) = 1$; (ii) $(1-x^2)y' - 2xy = 0$; (iii) $xy'' + 2y' + xy = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$;

(iv) $xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$; (v) $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2, y(0) = y'(0) = 0$; (vi) $xy' - y = \frac{x^2}{1-x}$.

Remarque. On exprimera explicitement les solutions obtenues à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 9.

Soit

$$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

1. Montrer que la fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y' - xy = 0, y(0) = 1.$$

Indication. Pour montrer l'unicité, on pourra considérer une solution quelconque y, puis calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto y(x)\sqrt{1-x^2}$.

2. En déduire que la fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$, et déterminer son développement en série entière.

Exercice 10

On considère l'équation différentielle ordinaire

$$y'' - 2xy' - 2y = 0. \tag{1}$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation (1).
2. Soit y, une solution de l'équation (1), définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   a. Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \left(e^{x^2}(e^{-x^2}y(x))'\right)' = 0.$$
   b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).