Université Paris Dauphine
Année universitaire 2008-2009
Analyse 3, DUMI2E

Chapitre 4: Séries de fonctions

Exercice 1.
Soit
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times]-1,1[, u_n(x) = nx^n.$$
1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $]-1,1[$ vers une fonction u à déterminer.
2. Soit $0 < \varepsilon < 1$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ vers la fonction u.

Exercice 2.
Soit
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times \mathbb{R}, f_n(x) = ne^{-nx}.$$
1. Quel est l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est convergente ?
2. Soit $a > 0$, et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$
Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
3.a. Calculer une primitive de la fonction f.
b. En déduire la valeur de la fonction f.

Exercice 3.
Soit
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^*\times \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2+x^2}.$$
1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général u_n sur $\mathbb{R}$.
2. Soit u, sa fonction somme. En déduire la continuité de la fonction u sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = -2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2+x^2)^2}.$$

Exercice 4.
Soit
$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^*\times \mathbb{R}, u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}.$$
1. Montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général u_n sur $\mathbb{R}$.

2. Soit u sa limite. Calculer la limite de $u(x)$ lorsque x tend vers 0.

3. Prouver que
$$\int_0^{\pi} u(x)dx = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

4. Montrer que la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Exercice 5.

Soit $-1 < a < 1$, et
$$\forall (n,t) \in \mathbb{N} \times [0, \frac{\pi}{2}], u_n(t) = \cos(t)^n a^n.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(t)$ converge uniformément sur $[0, \pi/2]$.

2. En déduire que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - a\cos(t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^n dt \Big) a^n.$$

Exercice 6.

Soit ζ, la fonction zéta de Riemann définie par
$$\forall x > 1, \zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

1. Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.

2.a. Montrer que
$$\forall x > 1, \frac{1}{x-1} < \zeta(x) < \frac{1}{x-1} + 1.$$

b. En déduire la limite de la fonction ζ en 1.

Exercice 7.

Soit
$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que la fonction S est définie et impaire sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}^*$.

3.a. Montrer que
$$\forall x > 0, \pi/2 < S(x) < \pi/2 + x.$$

b. En déduire que la fonction S admet des limites à droite et à gauche en 0, mais n'est pas continue en 0.

4. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.