GROUPE SYMPLECTIQUE

YVES DE CORNULIER

Les groupes symplectiques forment une des grandes familles des groupes de Lie simples. Cet exposé donne quelques propriétés élémentaires des groupes symplectiques, en particulier un calcul de ses groupes compacts maximaux (dans le cas réel).

1. Espaces symplectiques

1.1. Un espace symplectique sur un corps k est, par définition, un espace vectoriel V de dimension finie muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée ω. Un tel espace est forcément de dimension paire, disons $2n$, et possède une base (pas du tout unique !) $e_1, \dots e_{2n}$ vérifiant $\omega(e_i, e_j) = 0$ si $|j - i| \neq n$, $\omega(e_i, e_{i+n}) = 1$. Une telle base est dite symplectique.

Dans un espace symplectique (V, ω), les sous-espaces $W \subset V$ isotropes maximaux (i.e. $\omega(W, W) = 0$ et W maximal pour cette propriété) sont tous de dimension $n = \dim(V)/2$, et sont appelés sous-espaces lagrangiens. De façon équivalente, un sous-espace est lagrangien s'il est égal à son orthogonal. À l'opposé, les sous-espaces sur lesquels ω induit une forme non dégénérée sont appelés sous-espaces symplectiques, i.e. un sous espace W est symplectique si $W \cap W^\perp = \{0\}$.

L'orthogonal d'un sous-espace symplectique est un sous-espace symplectique. Tout sous-espace lagrangien admet un supplémentaire lagragien, mais il n'y en a aucun de "canonique".

1.2. Le groupe symplectique (d'un espace symplectique (V, ω)) est le groupe des applications linéaires qui préservent ω, et est noté $Sp(V, \omega)$. À isomorphisme près, il ne dépend que de la dimension $2n$ de V. On note $Sp_n(k)$ (certains préfèrent la notation $Sp_{2n}(k)$...) le groupe symplectique de k^{2n} muni de la forme symplectique standard : on vérifie sans peine qu'il s'identifie naturellement au groupe des matrices A vérifiant l'égalité $A^\intercal JA = J$, où $A^\intercal$ désigne la transposée de A et J est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$.

On note $\mathfrak{sp}_n(k)$ l'algèbre de Lie correspondante, i.e. les matrices vérifiant $A^\perp J + JA = 0$. Dans le cas réel ou complexe (ou plus généralement d'un corps topologique non discret) il s'agit de l'espace tangent en l'identité de $Sp_n(k)$. De façon générale, on peut voir la relation $A \in \mathfrak{sp}_n(k)$ comme un développement limité à l'ordre 1 en A de la relation $(1 + A) \in Sp_n(k)$.

1.3. De façon générale, si A est un opérateur d'un espace vectoriel, on note $E_\lambda(A)$ le sous-espace propre $Ker(A - \lambda)$.

On vérifie sans peine que si (V, ω) et si $A \in Sp(V, \omega)$, alors $\omega(E_\lambda(A), E_\mu(A)) = 0$ si $\lambda\mu \neq 1$.

2. Espaces orthosymplectiques

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie. Une forme bilinéaire ϕ induit un morphisme de V vers son dual V^* noté T_b, défini par

$$T_b(x)(y) = b(x, y)$$

Supposons maintenant V euclidien, et soit ω une forme alternée. On note $T = T_b$, où b est le produit scalaire. Alors $T^{-1} \circ T_\omega$ est un endomorphisme antisymétrique J de V. Dans une base orthonormée bien choisie, il se diagonalise par blocs 2×2 antisymétriques, dont les coefficients sont imposés au signe près et à l'ordre des blocs près.

On a donc l'équivalence : V admet une base orthonormée symplectique si et seulement si $J^2 + 1 = 0$.

D'où la définition

Définition 2.1. J'appelle espace orthosymplectique un espace vectoriel réel de dimension finie V muni d'un produit scalaire et d'une forme symplectique vérifiant, avec les notations précédentes, la relation $J^2 + 1 = 0$.

Par définition, l'opérateur J est caractérisé par $b(J(x), y) = \omega(x, y), \quad \forall x, y \in V$. En particulier, tout sous-espace symplectique J-stable d'un espace orthosymplectique est orthosymplectique.

Il est clair qu'un espace orthosymplectique est défini à isomorphisme près par sa dimension, forcément paire, et que tout espace symplectique (resp. euclidien de dimension paire) admet une structure orthosymplectique.

On se placera donc dans $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la structure euclidienne standard et de la structure symplectique standard $\omega(e_i, e_j) = 0$ si $|j - i| \neq n$, $\omega(e_i, e_{i+n}) = 1$.

Si A est un opérateur symétrique (i.e. sa matrice dans une base orthosymplectique est symétrique) symplectique, alors on a $V = E_1 \oplus E_{-1} \oplus \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A),|\lambda|>1}(E_\lambda \oplus E_{\lambda^{-1}})$. Ce sont des sous-espaces biorthogonaux (i.e. orthogonaux pour b et ω), et J-stables (même les E_λ sont J-stables), donc orthosymplectiques, et il existe donc une base orthosymplectique diagonalisant A.

En termes matriciels, on a démontré :

Proposition 2.2. *Soit $A \in Sp_n(\mathbb{R}) \cap S_{2n}(\mathbb{R})$. Alors il existe $\Omega \in O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_n(\mathbb{R})$ tel que $\Omega A \Omega^{-1}$ est diagonale.*

Corollaire 2.3. *L'exponentielle induit un difféomorphisme de $\mathfrak{sp}_n(\mathbb{R}) \cap S_{2n}(\mathbb{R})$ sur $Sp_n(\mathbb{R}) \cap S_{2n}^{++}$.*

Il est inutile d'espérer un théorème analogue pour le cas antisymétrique : en effet, tous les éléments de $O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_n(\mathbb{R})$ commutent avec J ! Or, il existe beaucoup d'autres matrices dans $O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_n(\mathbb{R})$ ayant pour carré -1. Pire, un changement de base simplement symplectique ne suffit pas, comme nous allons le voir.

Soit toujours A une matrice symplectique et antisymétrique. On voit tout de même que les $Ker(A^2 + a)$, $a \geq 0$ sont ω-orthogonaux, donc sont des sous-espaces symplectiques. Comme, de plus, A est supposée symplectique, ils sont isotropes si $a \neq 1$. Donc $A^2 + 1 = 0$. Cela mérite d'être énoncé :

Proposition 2.4. *Si A est symplectique et antisymétrique, alors $A^2 + 1 = 0$.*

Gardons A comme précédemment. Considérons $\alpha(x, y) = -\omega(x, Ay)$. Alors α est symétrique non dégénérée, et sa signature est un invariant de A (et est invariant par conjugaison par une matrice symplectique). Pour J, c'est $(2n, 0)$. Réciproquement, si c'est $(2n, 0)$, on considère L un sous-espace lagrangien L et une base α-orthonormée $e_1, \dots e_n$ de L : alors par construction $-Ae_1, \dots, -Ae_n, e_1, \dots, e_n$ est une base symplectique de V. En particulier, dans ce cas, A est conjuguée à J dans $Sp(V, \omega)$.

2.1. Pour reprendre : soit (V, ω) un espace symplectique. J'appelle j-élément de V un élément J de $Sp(V, \omega)$ antisymétrique (donc $J^2 + 1 = 0$) et tel que $-\omega(x, Jx) > 0$ si $x \neq 0$. Alors tous les j-éléments de $Sp(V)$ sont conjugués dans $Sp(V)$. La donnée d'un j-élémént sur un espace symplectique s'appelle une structure presque complexe compatible (avec la structure symplectique).

3. Sous-groupes compacts maximaux

Soit V un espace symplectique et K un sous-groupe compact connexe maximal de $Sp(V)$. Il existe sur V un produit scalaire ϕ préservé par K. Alors $K \subset Sp(V) \cap O(\phi)$, et, par maximalité de K, $K = (Sp(V) \cap O(\phi))^\circ$. Soit $J = T_\phi^{-1} \circ T_\omega$, où ω est la forme symplectique donnée sur V. Alors J est antisymétrique pour ϕ comme pour ω. De plus, tout élément de K commute avec J : c'est une conséquence facile du fait que les éléments de K préservent à la fois ϕ et ω.

Par réduction de l'endomorphisme antisymétrique J de l'espace euclidien (V, ϕ), V est somme directe ϕ-orthogonale des $E_i = Ker(J^2 + a_i)$, pour des a_i distincts > 0.

Alors il est immédiat que les E_i sont aussi ω-orthogonaux, utilisant que J est antisymétrique pour ω.

Alors on voit que si K' est l'ensemble des endomorphismes de V qui stabilisent les E_i, et dont la restriction à E_i est orthogonale et symplectique, alors $K = (K')^\circ$.

Maintenant, remarquons que J dépend de ϕ et écrivons le J_ϕ pour éviter toute ambiguïté. On a $J_{\lambda\phi} = \lambda^{-2} J_\phi$. Si on définit $\varphi = (a_i)^{1/4}\phi$ sur E_i, on a alors $J_\varphi^2 = -1$. On a muni V d'un nouveau produit scalaire préservé par les éléments de K. Donc, par maximalité de K, $K = (O(\varphi) \cap Sp(V))^\circ$. Comme (V, ϕ, ω) est un espace orthosymplectique, étudier l'action de K sur V revient à regarder l'action de $(Sp(n) \cap O(2n))^\circ$ sur $\mathbb{R}^{2n}$. Or cette dernière est irréductible puisqu'elle est transitive sur les droites (on peut le vérifier directement, ou par un argument dimensionnel). Comme les E_i sont stables par K, il n'y en a en fait qu'un seul, et donc ϕ et φ sont proportionnels. De plus, J étant maintenant choisi tel que $J^2+1=0$, $J \in Sp(V)$ (conséquence immédiate des relations $J^2+1=0$ et $J+J^{\perp}=0$).

Montrons que K est égal à $(Commmutant(J) \cap Sp(V))^{\circ}$ (notons qu'on sait maintenant que J_ϕ et J_φ sont proportionnelles, donc ont même commutant). On a déjà acquis l'inclusion de gauche à droite. Puis on voit, en se plaçant dans $\mathbb{R}^n$ que, pour une matrice symplectique, la condition pour commuter avec J est exactement de préserver le produit scalaire standard. Comme tous les J ainsi définis sont des j-éléments, et qu'on montré auparavant que tous les j-éléments sont conjugués, on obtient que tous les sous-groupes compacts maximaux sont conjugués.

Montrons, pour finir, que le commutant de J est connexe. Une fois cela acquis, on aura le résultat plus fort suivant :

Tout sous-groupe compact de $Sp(V)$ est contenu dans un sous-groupe compact maximal, et ces derniers sont tous conjugués, isomorphes à $O_{2n}(\mathbb{R}) \cap Sp_n(\mathbb{R})$, lui-même isomorphe au groupe unitaire $U(n)$.

Il suffit donc de montrer la dernière assertion. Les matrices qui commutent avec J s'écrivent $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ avec A antisymétrique et B symétrique. Après conjugaison par $2^{-1/2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, on obtient $\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix}$. On voit alors que la condition pour que $A+iB$ soit unitaire est équivalente à celle que $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ soit symplectique. D'où notre isomorphisme, et la connexité de $U(n)$ est élémentaire.