Une borne supérieure sur le nombre de faces d'un polytope

Ce papier donne une démonstration d'un théorème de McMullen sur les polytopes : étant donné deux entiers d et n, avec $n \geq d+1$, il existe un polytope, dit "cyclique" $C(n,d)$, de dimension d et à n sommets, tel qu'on a, pour tout polytope P de dimension d à n sommets, l'inégalité $f_i(P) \leq f_i(C(n,d))$, où on note $f_i(P)$ son nombre de i-faces. Le nombre $f_i(C(n,d))$ est tout-à-fait explicite. La démonstration exposée ici fait appel à la notion d'anneau de Cohen-Macaulay, qui sera brièvement introduite.

1 Préliminaires d'algèbre commutative

1.1 Profondeur et anneaux de Cohen-Macaulay

Soit $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ un anneau gradué. On fait de plus l'hypothèse que A est une algèbre de type fini sur le corps $A_0 = k$. On note $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_A$ l'idéal (maximal) $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$.

On appelle A-module gradué la donnée d'un module $M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n$, avec $A_p M_q \subset M_{p+q}$.

On appelle suite M-régulière (de longueur n) une suite $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de $\mathfrak{M}$ vérifiant que pour tout $1 \leq i \leq n$, x_i est non diviseur de zéro dans $M/(\sum_{j<i} x_j M)$. Elle est dite maximale s'il n'existe pas de suite régulière $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

Proposition 1.1. *Soit M un A-module gradué de type fini. Soit δ la borne supérieure des longueurs des suites M-régulières. Alors $\delta < \infty$, (en fait, δ est majoré par $\dim(M)$, la dimension de Krull de M), et toutes les suites M-régulières maximales sont de longueur δ.*

De plus, il existe une suite régulière maximale formée d'éléments homogènes, et il en existe même une formée d'éléments homogènes de degré 1 si, de plus, A est engendrée par A_1 comme k-algèbre et k est infini.

Enfin, on a $\delta = \inf\{i, \operatorname{Ext}^i_A(k,M) \neq 0\}$ (qui est la bonne définition de profondeur si M n'est pas de type fini).

Ces résultats sont standards, voir [Matsumura] par exemple. Pour montrer que si k est infini est A est engendré par A_1 comme k-algèbre, et si $\operatorname{prof}(M) > 0$, alors il existe un élément homogène de degré 1 non diviseur de zéro dans M, on remarque que A_1 ne peut pas être recouvert par les idéaux associés de M, car sinon il serait inclus dans l'un d'eux (car k infini), et alors $\mathfrak{M}$ serait associé à M, niant $\operatorname{prof}(M) > 0$.

Définition 1.2. Le module M est dit de Cohen-Macaulay si $\operatorname{prof}(M)$ est égal à la dimension de Krull de M.

1.2 Fonction de Hilbert

On suppose que A est comme précédemment, et que de plus il est engendré par A_1 comme k-algèbre, et que k est infini.

Si M est un A-module (gradué de type fini), on définit sa série de Hilbert comme la série génératrice

$$H_M(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dim_k(M_n) t^n$$

Proposition 1.3. *Il existe un polynôme de Laurent $Q_M(t) = \sum_i h_i t^i \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ tel que*

$$H_M(t) = \frac{Q_M(t)}{(1-t)^d}$$

avec $d = \dim(M)$. Si M est de Cohen-Macaulay, i.e. s'il existe une suite régilière maximale (x_i), alors $Q_M(t) = H_{M/\sum x_i M}(t)$; en particulier, les h_i sont positifs.

La première assertion est standard, voir [Matsumura]. Pour la seconde, il faut remarquer que si x est homogène de degré 1 et est non diviseur de zéro, alors on a une suite exacte de A-modules gradués

$$O \longrightarrow M[-1] \xrightarrow{x} M \longrightarrow M/xM \longrightarrow 0$$

d'où $(1-t)H_M(t) = H_{M/xM}(t)$, soit $Q_M(t) = Q_{M/xM}(t)$. Finalement, si $x_1, \ldots, x_n$ est une suite régulière maximale d'éléments homogènes de degré 1, alors $Q_M(t) = Q_{M/(\sum x_i M)}(t) = H_{M/\sum x_i M}(t)$. Or les coefficients de cette dernière série sont des entiers positifs, et on a terminé.

2 Anneaux attachés aux complexes simpliciaux : les anneaux de Stanley-Reisner

Dans cette partie, on présente de façon générale la notion de complexe simplicial, puis on lui associe un anneau, dit de Stanley-Reisner. Le calcul de la série de Hilbert de cet anneau permet d'effectuer des calculs puissants sur le nombre de faces d'un complexe simplicial. On arrive notamment à une borne optimale sur le nombre de faces d'un polytope, en se ramenant au cas simplicial.

2.1 Complexes simpliciaux

Définition 2.1. Un complexe simplicial (fini) est un couple (S, Δ), où S est un ensemble fini (ensemble des sommets), et Δ est un ensemble de non vide de parties de S, appelées faces, vérifiant que toute partie d'une face est une face, et que tout singleton est une face. On l'appelera souvent Δ au lieu de (S, Δ).

La dimension d'une face $F \in \Delta$ est $d = \dim(F) = |F| - 1$; on dit que c'est une d-face. Le nombre $\sup\{\dim(F), F \in \Delta\} \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ est appelé la dimension du complexe simplicial Δ. Les faces maximales sont aussi appelées facettes.

Un complexe simplicial (S, Δ) est appelé simplexe si $S \in \Delta$, i.e. si Δ est l'ensemble des parties de S.

Si (S, Δ) est un complexe simplicial, une partie non vide $\Delta' \subset \Delta$ est appelé sous-complexe simplicial si tout partie d'un élément de Δ' est dans Δ. L'union S' des parties de Δ' est alors l'ensemble des sommets de Δ'. Si $D \subset \Delta$ est non vide, le sous-complexe simplicial engendré par D est l'ensemble des parties des éléments de D.

Définition 2.2. À un complexe simplicial Δ, on associe la partie $s(\Delta)$ de $\mathbb{R}^S$ définie comme suit : à toute face $F \subset S$ on associe le simplexe $s(F)$ défini comme l'enveloppe convexe des e_s pour $s \in F$ ((e_s) est la base canonique de $\mathbb{R}^S$), et on pose $s(\Delta) = \bigcup_F s(F)$. C'est la réalisation géométrique standard de Δ. Ainsi on voit Δ comme sous-complexe du simplexe à $|S|$ sommets.

Les propriétés topologiques de $s(\Delta)$ sont des invariants importants de Δ. On appelle plus généralement réalisation géométrique de Δ la donnée d'un espace topologique et de parties de cet espace correspondant aux faces, tel qu'il existe un homéomorphisme vers $s(\Delta)$, respectant les faces.

On note $f_d = f_d(\Delta)$ le nombre de d-faces ($f_{-1} = 1$), et le vecteur $f(\Delta) = (f_{-1}, f_0, f_1, \ldots, f_n)$, où $n = \dim(\Delta)$, est appelé le f-vecteur du complexe simplicial Δ.

Changeons de "coordonnées" : on définit la suite (h_i) par l'égalité des séries formelles

$$\sum_i h_i X^i = \sum_{j=0}^{d} f_{j-1} X^j (1-X)^{d-j}$$

donnant les relations

$$h_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d-j}{i-j} f_{j-1} \qquad \text{et} \qquad f_{j-1} = \sum_{i=0}^{j} \binom{d-i}{j-i} h_i$$

On voit qu'on a $h_i = 0$ pour $i > d$, et on note $(h_0, \ldots, h_d)$ le h-vecteur de Δ.

Notons que le h-vecteur d'un simplexe a une forme très simple : $h_0 = 1$ et $h_i = 0$ si $i > 0$.

Décrivons en détail le cas des petites dimensions. On note ici $s = f_0$, $a = f_1$, $f = f_2$. Si la dimension est zéro (Δ discret), $h_0 = 1$ et $h_1 = s - 1$.

Si la dimension est 1 (graphe), $h_0 = 1$, $h_1 = s - 2$, et $h_2 = a - s + 1$. Si Δ est connexe, la théorie élémentaire des graphes donne $a - s + 1 \geq 0$, avec égalité si et seulement si Δ est un arbre ; plus généralement h_2 est le nombre de boucles.

Si la dimension est 2, $h_0 = 1$, $h_1 = s - 3$, $h_2 = a - 2s + 3$, et $h_3 = f - a + s - 1$. Si Δ est une surface, chaque arête appartient à exactement deux faces, d'où l'égalité $3f = 2a$, qui se réécrit $h_2 - h_1 = 3(1 - h_3)$. Dans le cas encore plus particulier d'un polyèdre à faces triangulaires, on a la relation d'Euler $s + f - a = 2$, et alors on a $h_0 = h_3 = 1$, et $h_1 = h_2 = s - 3$.

Revenons en dimension quelconque. On définit la caractéristique d'Euler-Poincaré de Δ comme $\chi(\Delta) = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i f_i$. La proposition suivante est alors immédiate :

Proposition 2.3.

$$h_0 = 1, \;\; h_1 = s - d, \;\; h_d = (-1)^{d-1}(\chi(\Delta) - 1), \;\; \sum_{i=0}^{d} h_i = f_{d-1}.$$

Remarque 2.4. On montre que $\chi(\Delta)$ ne dépend que de la topologie, et même que du type d'homotopie de l'espace topologique $s(\Delta)$. Plus généralement, on peut définir, de façon combinatoire l'homologie simpliciale, qui ne dépend aussi que du type d'homotopie de $s(\Delta)$, voir par exemple [Massey].

Définition 2.5. Un complexe simplicial Δ de dimension d est dit constructible si c'est un simplexe, ou bien si on peut partitionner $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ avec $\Delta_1, \Delta_2 \subsetneq \Delta$ constructibles de dimension d et $\Delta_1 \cap \Delta_2$ constructible de dimension $d - 1$.

Définition 2.6. Un complexe simplicial de dimension $d - 1$ est dit effeuillable (en anglais : shellable) s'il est pur et si on peut indexer ses facettes $(F_1, \ldots, F_n)$ de telle façon que, pour tout $j > 1$, $F_j \cap \bigcup_{i<j} F_i$ est de dimension pure $d - 2$, i.e. est une union de facettes de F_j. Un tel ordre total sur les facettes est appelé un effeuillage.

Si on a un complexe effeuillable, la donnée d'un effeuillage permet de calculer explicitement son h-vecteur :

Proposition 2.7. *Soit Δ un complexe simplicial effeuillable de dimension $d - 1$, et $(F_1, \ldots, F_n)$ un effeuillage. Soit, pour $j > 1$, r_j le nombre de facettes (forcément de dimension $d - 2$) de $\langle F_j \rangle \cap \langle F_1, \ldots F_{j-1} \rangle$ (et $r_1 = 0$). Alors, pour tout $i \in [\![0, d]\!]$, $h_i = \#\{j, r_j = i\}$. En particulier, à l'ordre près, la suite (r_j) ne dépend pas du choix de l'effeuillage.*

Cette proposition sera prouvée dans la sous-partie suivante de façon "algébrique". Elle se montre cependant sans difficulté par un calcul direct. L'idée est que si on "greffe" un simplexe sur une $(i - 1)$-face d'un complexe simplicial, on augmente le h_i de 1 et les autres h_j de 0.

2.2 L'anneau de Stanley-Reisner d'un complexe simplicial

Définition 2.8. Soit Δ un complexe simplicial et k un anneau. L'anneau de Stanley-Reisner (ou algèbre des faces) de Δ est défini comme suit :

Les générateurs de $k[\Delta]$ sont les $X_s, s \in S$, et les relations sont $\prod_{v\in A} X_v = 0$ pour toute partie $A \notin \Delta$. Autrement dit, $k[\Delta] = k[X^s, s \in S]/I_\Delta$, où I_Δ est engendré par les monômes $\prod_{v\in A} X_v$, $A \notin \Delta$.

Un complexe simplicial est dit de Cohen-Macaulay (resp. de Gorenstein, etc.) si $k[\Delta]$ l'est pour un corps k.

Comme l'idéal des relations est engendré par des monômes, on obtient sur $k[\Delta]$ une graduation évidente par $\mathbb{N}^S$. On a aussi une graduation, moins fine, par $\mathbb{N}$, en imposant X_s à être de degré 1 pour $s \in S$.

On note, pour $F \subset S$, $X_F = \prod_{s\in F} X_s$. Les X_F, F face, forment une famille libre de l'espace vectoriel $k[\Delta]$ (les autres X_F sont nuls par définition).

Remarque 2.9. Les simplexes sont les seuls complexes simpliciaux "intègres".

Proposition 2.10. *On suppose l'anneau k réduit. Alors $k[\Delta]$ est réduit.*

Preuve. Il faut remarquer que le nilradical d'un anneau A $\mathbb{N}^n$-gradué est homogène. Pour cela on prend $x \in \mathrm{Nrad}(A)$, qu'on écrit comme somme d'éléments homogènes de A : $x = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i$. Soit i_0 minimal (pour l'ordre lexicographique de $\mathbb{N}^n$) tel que $a_{i_0} \neq 0$. On vérifie alors facilement que $a_i \in \mathrm{Nrad}(A)$. En considérant $x - a_i$ et ainsi de suite, on montre que tous les a_i sont dans $\mathrm{Nrad}(A)$. En appliquant cela à $A = k[\Delta]$, on obtient le résultat : en effet, $\mathrm{Nrad}(A)$ est engendré par ses éléments homogènes. Si aX^α est un élément homogène non nul de $\mathrm{Nrad}(A)$, alors $a^n X^{n\alpha} = 0$ pour n grand. Comme k est réduit, a^n est non nul, donc $X^{n\alpha} = 0$, et donc $X^\alpha = 0$, puisque l'idéal I_Δ est engendré par des monômes sans facteur carré. $\square$

Définition 2.11. Soit Δ un complexe simplicial. On appelle facette un élément de Δ maximal pour l'inclusion. On dit que Δ est pur si toutes les facettes ont la même dimension.

On a le lemme important de "dévissage"

Lemme 2.12. *Si Δ est réunion de deux sous-complexes simpliciaux Δ_1 et Δ_2, alors on a une suite exacte de $k[\Delta]$-modules*

$$0 \longrightarrow k[\Delta] \longrightarrow k[\Delta_1] \oplus k[\Delta_2] \longrightarrow k[\Delta_1 \cap \Delta_2] \longrightarrow 0$$

Preuve. On note I_1 et I_2 les idéaux de $k[\Delta]$ correspondants : I_i est engendré par les $\prod_{s_i n A} X_s$ pour $s \notin \Delta_i$, et $k[\Delta]_i = k[\Delta]/I_i$. On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow k[\Delta]/(I_1 \cap I_2) \longrightarrow k[\Delta]/I_1 \oplus k[\Delta]/I_2 \longrightarrow k[\Delta]/(I_1 + I_2) \longrightarrow 0$$

Or, comme $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, les idéaux I_1 et I_2 ont une intersection nulle dans $k[\Delta]$. De plus $I_1 + I_2$ définit clairement le sous-complexe simplicial $I_1 \cap I_2$. D'où la suite exacte annoncée. $\square$

Proposition 2.13. *Pour un complexe simplicial Δ, on a les implications*

$$\Delta \text{ effeuillable} \Rightarrow \Delta \text{ constructible} \Rightarrow \Delta \text{ Cohen-Macaulay sur tout corps}$$

Preuve. La première implication est claire. Prouvons la seconde, par récurrence sur la dimension, puis sur le nombre de sommets. D'abord il est clair qu'un simplexe est de Cohen-Macaulay sur tout corps. Supposons donc que $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ avec Δ_1, Δ_2 constructibles de dimension d et $\Delta_1 \cap \Delta_2$ constructible de dimension $d-1$. Soit I_1 et I_2 les idéaux de $k[\Delta]$ correspondants. On écrit la suite exacte du lemme 2.12 :

$$0 \longrightarrow k[\Delta] \longrightarrow k[\Delta_1] \oplus k[\Delta_2] \longrightarrow k[\Delta_1 \cap \Delta_2] \longrightarrow 0$$

La suite exacte longue correspondante pour l'application de foncteur $\mathrm{Hom}(k, -)$ (dans la catégorie des $k[\Delta]$-modules) donne, si $i < d$,

$$0 = \mathrm{Ext}^{i-1}(k, k[\Delta_1 \cap \Delta_2]) \to \mathrm{Ext}^i(k, k[\Delta]) \to \mathrm{Ext}^i(k, k[\Delta_1] \oplus k[\Delta_2]) = 0$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Regardons maintenant de plus près la graduation de $k[\Delta]$. La série formelle $H_{k[\Delta]}(\mathbf{X}) = \sum_{a \in \mathbb{Z}^S} \dim_k(k[\Delta]_a)\mathbf{X}^a$, où $\mathbf{X}^a = \prod_{s \in S}(X_s^{a_s})$ est appelée série de Hilbert de l'anneau $\mathbb{Z}^S$-gradué $k[\Delta]$. À la graduation totale correspond la série de Hilbert $H_{k[\Delta]}(X) = H_{k[\Delta]}(X, \ldots, X)$. Calculons-les. On note, pour $a \in \mathbb{Z}^S$, $\mathrm{supp}(a) = \{s \in S, a(s) \neq 0\}$.

$$H_{k[\Delta]}(\mathbf{X}) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^S \\ \mathrm{supp}\ a \in \Delta}} \mathbf{X}^a = \sum_{F \in \Delta} \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}^S \\ \mathrm{supp}\ a = F}} \mathbf{X}^a$$

Un calcul donne

$$\sum_{a \in \mathbb{N}^S,\ \mathrm{supp}\ a = F} \mathbf{X}^a = \prod_{s \in F} \frac{X_s}{1 - X_s}$$

D'où

$$H_{k[\Delta]}(\mathbf{X}) = \sum_{F \in \Delta} \prod_{s \in F} \frac{X_s}{1 - X_s}$$

Il s'ensuit, f_j étant le nombre de j-faces et $d-1$ la dimension de Δ, que

$$H_{k[\Delta]}(X) = \sum_{j=0}^{d} f_{j-1} \frac{X^j}{(1-X)^j}$$

Proposition 2.14.

$$H_{K[\Delta]}(X) = \sum_{j=0}^{d} f_{j-1} \frac{X^j}{(1-X)^j} = \frac{\sum_{i=0}^{d} h_i X^i}{(1-X)^d}$$

Preuve. L'égalité de gauche a déjà été obtenue, la suivante s'obtient directement en écrivant $f_{j-1} = \sum_{i=0}^{j} \binom{d-i}{j-i} h_i$, en intervertissant les signes somme et en appliquant le binôme de Newton. $\square$

A l'aide de tout cela, prouvons la proposition 2.7. Rappelons que r_j est le nombre de facettes de $\langle F_j \rangle \cap \langle F_1, \dots F_{j-1} \rangle$, et qu'on veut montrer que, pour tout $i \in [\![0, d]\!]$, $h_i = \#\{j, r_j = i\}$.

Soit $\Delta_j = \langle F_1, \dots, F_j \rangle$, et $H_{k[\Delta_j]}(t) = Q_j(t)/(1-t)^d$. Grâce à la suite exacte du lemme 2.12 :

$$0 \longrightarrow k[\Delta_j] \longrightarrow k[\Delta_{j-1}] \oplus k[F_j] \longrightarrow k[\langle F_j \rangle \cap \Delta_{j-1}] \longrightarrow 0$$

on a l'égalité

$$\frac{Q_j(t)}{(1-t)^d} = \frac{Q_{j-1}(t)}{(1-t)^d} + \frac{1}{(1-t)^d} - \frac{P_j(t)}{(1-t)^{d-1}}$$

Le lemme ci-dessous donne $P_j(t) = \sum_{i=0}^{r_j - 1} t^i$. Donc $Q_j(t) = Q_{j-1}(t) + t^{r_j}$. Comme $Q_1(t) = 1$, on en déduit $Q_n(t) = \sum_{j=1}^{m} t^{r_j}$. $\square$

On a utilisé le lemme, de vérification immédiate

Lemme 2.15. *Soit Δ un complexe simplicial enegndré par m facettes d'un simplexe S de dimension $n-1$ ($m \leq n$). Alors, notant les sommets de 1 à n, de telle façon que les facettes sont les $S \backslash \{i\}$ pour $i \leq m$, on a $k[\Delta] = k[X_1, \dots, X_n]/X_1 \cdots X_m$ et $h(\Delta) = (h_i)$ avec $h_i = 1$ si $i < m$, $i = 0$ si $i \geq m$.*

On a maintenant le théorème moins évident :

Théorème 2.16. *On suppose Δ de Cohen-Macaulay. Alors $0 \leq h_i \leq \binom{s-d+i-1}{i}$ pour tout i.*

Preuve. Soit k un corps tel que $k[\Delta]$ est de Cohen-Macaulay. Comme cette dernière propriété est invariante par extension de corps, on peut supposer k infini. Par la proposition 1.1, il existe une suite régulière maximale d'éléments de degré 1, et soit A l'anneau artinien obtenu en quotientant par cette suite. D'après les propositions 1.3 et 2.14, $h_i = H(A, i)$, ce qui implique en particulier que $h_i \geq 0$. Comme A est engendré par $n-d$ éléments de degré 1, la fonction de Hilbert de A est majorée par celle d'un anneau de polynômes à $n-d$ variables. D'où la seconde inégalité. $\square$

2.3 Application aux polytopes

Rappelons qu'un polytope de dimension d est une partie compacte d'intérieur non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension d qui est enveloppe convexe d'un ensemble fini, ou, de façon équivalente, qui est intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Les faces d'un polytope sont les intersections de ce polytope avec des hyperplans tangents ; elles sont en nombre fini. Un polytope simplicial de dimension d est un polytope de dimension d dont toutes les faces strictes sont des simplexes. Alors l'ensemble des faces strictes définit naturellement un complexe simplicial de dimension pure $d-1$, dont la frontière du polytope est une réalisation géométrique.

Définition 2.17. Un polytope de dimension d est dit effeuillable s'il existe un ordre total $F_1 \dots F_n$ sur ses facettes tel que, pour $j > 1$, $F_j \cap \bigcup_{i<j} F_i$ est homéomorphe à la boule fermée B_{d-2} ou à la sphère S^{d-2} de dimension $d-2$.

Si le polytope est simplicial, les deux notions d'effeuillables coïncident : s'il est effeuillable comme complexe simplicial, $F_j \cap \bigcup_{i<j} F_i$ est une union de facettes de F_j, donc est homéomorphe à B_{d-2} ou à S^{d-2} ; réciproquement s'il est effeuillable comme polytope, la topologie de $F_j \cap \bigcup_{i<j} F_i$ implique qu'il est de dimension pure $d-2$, donc est égal à une union de facettes de F_j.

Proposition 2.18 (Bruggesser-Mani). *Tout polytope est effeuillable. De plus, on peut choisir l'effeuillage $(F_1, F_2, \dots, F_n)$ de telle façon que $(F_n, \dots, F_2, F_1)$ en est aussi un.*

Preuve. Soit donc P un polytope simplicial. On écrit P comme intersection d'un nombre fini de demi-espaces distincts $\{l_i \le 1\}$, et soient F_i les facettes correspondantes. Soit c un vecteur n'appartenant à aucun des hyperplans $\{l_i - l_j = 0\}$. Quitte à réordonner les facettes, on peut supposer que la suite $l_i(c)$ est strictement décroissante. Cet ordre est facile à visualiser : on se déplace sur la droite (Oc), en partant de l'origine dans la direction de c (qui est par hypothèse dans l'intérieur du polytope), et on numérote les facettes au fur et à mesure qu'elles deviennent "visibles" (une facette devient visible quand on traverse l'hyperplan affine la contenant) ; quand on arrive à l'infini, on poursuit à l'opposé jusqu'à revenir à l'origine. On voit alors que, si $1 < j < n$ et $l_j(c) > 0$, $(F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}) \cap F_j$ est égal à l'ensemble des points visibles dans H_j depuis a, où $\{a\} = H_j \cap (Oc)$. En effet, soit $x \in H_j$ un point visible depuis a, où $l_j(a) = 1$. Alors il existe i tel que $l_i > 1$ sur $]x, a]$ (sinon, pour tout i, il existe $x_i \in]x, a]$ tel que $l_i(x_i) \le 1$, donc pour tout i, $l_i \le 1$ sur $]x, x']$, où x' est le point de $]x, a]$ le plus à gauche de tous les x_i, et alors $[x, x'] \subset P$ et x n'est pas visible depuis a). Puis $x \in P$, donc $l_i(x) = 1$. Comme $l_i((1-\lambda)x + \lambda a) > 1$ si $\lambda > 0$, $l_i(a) > 1$. Si $l_j(c) < 0$, on procède de même avec les points antivisibles : $(F_1 \cup \cdots \cup F_{j-1}) \cap F_j$ est égal à l'ensemble des points antivisibles dans H_j depuis a. Le cas $j = n$ est à part, car a est alors sur la facette F_n, et $(F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}) \cap F_n$ est l'union des facettes de F_n, et est donc homéomorphe à une sphère.

Enfin, en remplaçant c par $-c$ on voit que $F_n, \ldots F_1$ est aussi un effeuillage. $\square$

Lemme 2.19. *Soit P un polytope de $\mathbb{R}^d$, et a un point extérieur. Notons P_a l'ensemble des points visibles depuis a, i.e. $P_a = \{x \in P, [x, a] \cap P = \{x\}\}$. Alors P_a est homéomorphe à une boule fermée de dimension $d - 1$, et est une union de facettes de P.*

De même, soit P^a l'ensemble des points anti-visibles depuis a, i.e. $P^a = \{x \in P, [x, a] \cap P = (x, a) \cap P$. Alors P^a vérifie les mêmes propriétés, et P est la réunion de P_a et P^a.

Preuve. On considère un hyperplan séparant strictement a et P. On projette P sur cet hyperplan suivant la direction de a. Il est clair que cette projection est continue, et est injective en restriction à P_a. Montrons que P_a est compact : c'est une conséquence du fait immédiat que P_a est une union de faces, car si $x \in P_a$ est à l'intérieur (relatif) d'une face F, alors $F \subset P_a$. Comme P_a est compact, la projection sur H induit un homéomorphisme de P_a sur son image, qui est égale à la projection de P entier, et dont on voit sans difficulté qu'elle est compacte, convexe, et d'intérieur non vide dans H, donc homéomorphe à une boule fermée de dimension $d - 1$. Maintenant un argument topologique permet de montrer que P_a est une union de facettes : P_a est union de faces, mais les faces non maximales sont forcément d'intérieur vide (c'est clair en projetant sur H), donc l'union des facettes contenues dans P_a est dense et à la fois compact, donc c'est tout P_a. Le cas de P^a est analogue. $\square$

On arrive enfin au principal théorème de cette partie :

Théorème 2.20. *Soit un P un polytope simplicial de dimension d, et $(h_0, h_1, \ldots, h_d)$ son h-vecteur. Alors*

- $0 \le h_i \le \binom{s-d+i-1}{i}$
- *(Sommerville)* $h_i = h_{d-i}$

Preuve. On a déjà démontré le premier point. Le second est une conséquence de 2.7 et de l'existence d'un effeuillage $(F_1, \ldots, F_n)$ tel que $(F_n, \ldots F_1)$ est aussi un effeuillage. En effet, h_i est, par la proposition 2.7, le nombre de facettes F_j qui ont une facette commune avec exactement i facettes F_k pour $k < j$. Il faut alors remarquer que, comme P est un polytope de dimension d, toute face de dimension $d - 2$ est contenue dans exactement 2 facettes. Donc h_i est aussi le nombre de facettes F_j qui ont une facette commune avec exactement $d - i$ facettes F_k pour $k > j$. Comme $F_n, \ldots, F_1$ est aussi un effeuillage, ce nombre est h_{d-i}. $\square$

Proposition 2.21. *Il existe un polytope simplicial $C(n, d)$ (pour tout (n, d) avec $n \ge d + 1$) de dimension d, à n sommets, tel que l'inégalité de la proposition 2.16 $h_i(P) \le \binom{s-d+i-1}{i}$ est une égalité pour tout $i \le d/2$. Le polytope $C(n, d)$, dit cyclique, s'obtient en prenant l'enveloppe convexe de n points distincts arbitraires sur la courbe $\{(\tau, \tau^2, \ldots, \tau^d), \tau \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^d$.*

Preuve. Le fait que ce polytope est simplicial est un bête calcul de déterminants de Vandermoonde. Pour l'autre proposition, voir [Bruns-Herzog]. $\square$

Ainsi, grâce à la proposition 2.16 et aux relations de Sommerville, $h_i(P) \leq h_i(C(n,d))$ pour tout polytope simplicial P de dimension d à n sommets et tout i. Le fait que les f_i sont des combinaisons positives des h_i implique alors $f_i(P) \leq f_i(C(n,d))$ pour tout polytope simplicial P de dimension d à n sommets et tout i.

On peut même s'affranchir de l'hypothèse que P est simplicial, grâce au lemme

Lemme 2.22. *Soit P un polytope de sommets (distincts) $s_1, \ldots, s_n$, et P' obtenu en perturbant les sommets, i.e. P' est l'enveloppe convexe de $\{s'_1, \ldots, s'_n\}$, pour $(s'_1, \ldots s'_n)$ suffisamment proche de $(s_1, \ldots, s_n)$. Alors*

- *L'ensemble P' est un polytope de sommets (distincts) $s'_1, \ldots, s'_n$.*
- *Si $I \subset \{1, \ldots, n\}$ est tel que les s_i, $i \in I$ sont les sommets d'une d-face de P, alors il existe $J \subset I$ tel que les $s'_i, i \in J$ sont les sommets d'une d-face de P'. En particulier, P' a au moins autant de d faces que P, pour tout d.*
- *Si P' est choisi au hasard, il est simplicial.*

Preuve. Pour la première assertion, il suffit de remarquer que la condition sur $(s_1, \ldots, s_n)$ pour qu'ils forment les sommets d'un polytope est une condition ouverte.

Pour la troisième, il suffit de remarquer que la condition pour $s_1, \ldots, s_n$ de ne jamais contenir $d+2$ points dans un d-plan peut s'écrire comme non-annulation d'un polynôme.

Enfin, pour montrer la seconde, on considère une face F de P, maximale parmi celles dont les sommets sont parmi $s_1, \ldots, s_n$, et on considère un d-plan H, tangent à P' tel que $F = H \cap P'$. Si F n'est pas de dimension d, on peut déplacer légèrement ce d-plan de telle façon de le faire atteindre un sommet de plus parmi les s_i, sans atteindre les autres sommets, ce qui nie la maximalité de F. $\square$

On a prouvé

Théorème 2.23 (borne supérieure pour les polytopes, McMullen). *Soit P un polytope de dimension d à n sommets ($n \geq d+1$), et $f_i(P)$ son nombre de i-faces. Alors*

$$f_i(P) \leq f_i(C(n,d)) \text{ pour tout } i$$

où $C(n,d)$ est le polytope cyclique de dimension d à n sommets.

Remarque 2.24. Il n'y a en général pas unicité pour le cas d'égalité : par exemple, en dimension 3, tout polytope simplicial vérifie l'égalité, et si $n \geq 6$ il n'y a donc pas unicité. Plus généralement, on voit qu'il y a égalité si et seulement si pour tout i tel que $2i \leq d$, toute partie à i éléments de l'ensemble S des sommets est une face (forcément simpliciale).

3 Références

Bruns W., Herzog J., (1993) *Cohen-Macaulay rings.* Cambridge University Press, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 39.

Eisenbud D., (1995) *Commutative algebra with a view towards algebraic geometry.* Springer, Graduate Texts in Mathematics 150.

Matsumura H., (1986) *Commutative ring theory.* Cambridge University Press, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 8.

McMullen P., Shephard G., (1971) *Convex polytopes and the upper bound conjecture.* Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series 3.

Stanley R. P., (1983 ; seconde édition, 1996) *Combinatorics and commutative algebra.* Birkhäuser, Progress in Mathematics.