INTRODUCTION AU SPECTRE DU LAPLACIEN SUR UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE

YVES DE CORNULIER

1. Définition du laplacien

On va généraliser à une variété riemannienne la notion connue de laplacien sur un ouvert Ω d'un espace euclidien E, définie par

$$\triangle = -\sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega))$$

On peut écrire $\triangle = -\mathrm{div}\ \mathrm{grad}$, avec $\mathrm{div} f = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i} : C^\infty(\Omega, E) \to C^\infty(\Omega)$.

On va définir la notion analogue sur les variétés riemanniennes. Déjà, on sait que le gradient y est bien défini. D'autre part, rappelons que, sur une variété riemannienne M de dimension n orientée, il existe une forme volume canonique : c'est la section du fibré $\bigwedge^n T^*M$ qui en $x \in M$ vaut 1 sur toute base orthonormée directe de T_xM. Si M est maintenant quelconque (i.e. pas forcément orientée), on peut choisir localement une orientation, et donc une forme volume locale, unique au signe près. Rappelons aussi la notion de produit intérieur d'un champ de vecteur ξ par une forme différentielle ω de degré n : c'est la forme différentielle de degré $n-1$

$$(\xi \lrcorner \omega)(x_1, \dots, x_{n-1}) = \omega(\xi, x_1, \dots, x_{n-1})$$

La divergence du champ de vecteurs ξ est alors définie (localement) par :

$$d(\xi \lrcorner \omega) = \mathrm{div}\xi.\omega$$

où ω est une forme volume locale. Il est immédiat que cette définition ne dépend pas du choix de ω, et donc définit globalement une fonction scalaire $\mathrm{div}\xi$ sur ω.

On vérifie l'égalité

$$\mathrm{div}(f\xi) = f.\mathrm{div}\xi + df(\xi)$$

On voit que $\mathrm{div}\xi$ est la trace de l'endomorphisme $X \mapsto \nabla_X \xi$.

L'opérateur correspondant à la divergence sur les différentielles de degré 1 se note $-\delta$. On peut alors définir le laplacien comme l'opérateur sur $C^\infty(M)$

$$\triangle = \delta d = -\mathrm{div}\ \mathrm{grad}$$

Passons au calcul en coordonnées locales : la métrique est donnnée par la matrice (g_{ij}), et soit $\theta = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Alors $\mathrm{div}\xi = \theta^{-1} \sum_i \frac{\partial(\theta.\xi^i)}{\partial x^i}$. Si (g^{ij}) est la matrice inverse de (g_{ij}), alors le laplacien s'écrit

$$\triangle f = -\theta^{-1} \sum_{i,j} \frac{\partial(\theta.g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j})}{\partial x^i}$$

Le laplacien est un opérateur différentiel du second ordre, sa partie homogène du second ordre s'écrivant :

$$\sigma = -\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

C'est une forme quadratique définie négative, et on dit alors que le laplacien est un opérateur différentiel elliptique du second ordre.

Le laplacien satisfait à l'égalité

$$\triangle fg = f\triangle g - 2\langle f, g\rangle + g\triangle f$$

Date: avril 2003 ; dernière révision 1er mars 2004.

Considérons, en $m \in M$, un repère orthonormé (x_i) de $T_m M$, et soient $(\gamma_i(t))$ les géodésiques correspondantes. Alors

$$\triangle f(m) = -\sum_i (f \circ \gamma_i)''(0)$$

Si M est compacte, alors les opérateurs grad et $-$div sont adjoints : en effet

$$\int_M (\langle \mathrm{grad} f, \xi\rangle + \langle f, \mathrm{div}\xi\rangle) = \int_M (\mathrm{div}(f\xi)) = 0$$

grâce au

Lemme 1.1. *Si M est une variété et χ un champ de vecteurs à support compact, alors $\int_M \mathrm{div}\chi = 0$.*

D'abord, si M est orientable, il existe une forme volume globale ω, et $\int_M \mathrm{div}\chi = \int_M \mathrm{grad}(\chi \lrcorner \omega)\omega = 0$ par Stokes. Si M n'est pas orientable, son fibré d'orientation est un revêtement orientable $\widetilde{M}$ à deux feuillets, et on obtient le résultat en remontant à $\widetilde{M}$.

2. Spectre du laplacien

On appelle fonction harmonique une fonction de laplacien nul. Les fonctions harmoniques satisfont au principe du maximum. En particulier, Si M est compacte, alors toute fonction harmonique est constante.

Pour M compacte, les opérateurs grad et $-$div étant adjoints, on a les égalités

$$\langle \triangle f, g\rangle = \langle f, \triangle g\rangle,\ \langle \triangle f, f\rangle = \|\mathrm{grad} f\|^2$$

Donc, sur une variété compacte, le laplacien est un opérateur auto-adjoint positif, défini-positif sur l'orthogonal de 1, i.e. sur les fonctions de moyenne nulle. En particulier, ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_+$.

Les propriétés spectrales vont se déduire du fait que le laplacien d'une variété compacte se comporte essentiellement comme l'inverse d'un opérateur compact. On arrive au résultat que l'ensemble des valeurs propres peut s'écrire comme une suite tendant vers l'infini, où chaque valeur apparaît autant de fois que sa multiplicité (forcément finie) : $\mathrm{Spec}(M) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \ldots\}$, et $L^2(M)$ est égal à la somme hilbertienne des sous-espaces propres.

Soit $\phi \in L^2(M)$. On définit un opérateur $T : L^2(M) \to H^1(M)$ comme ceci : la forme linéaire $\eta \to \langle \eta, \phi\rangle$ est continue pour la norme $L^2(M)$, donc a fortiori pour la norme $H^1(M)$. Donc il existe un unique $\psi = T(\phi)$ tel que pour tout $\eta \in H^1(M)$,

$$\langle \phi, \eta\rangle = \langle \psi, \eta\rangle + \langle \mathrm{grad}\psi, \mathrm{grad}\eta\rangle$$

On vérifie alors que $(1 + \triangle)T\phi = \phi$, pour tout $\phi \in L^2(M)$. On a alors besoin du

Lemme 2.1 (de régularisation)**.** *Si $g \in H^s(M)$ et $\triangle f = g$ au sens des distributions, alors $f \in H^{s+2}(M)$.*

Ce lemme est valable dans un cadre plus général, et est une conséquence de l'ellipticité du laplacien. On en déduit que T envoie en fait $L^2(M) = H^0(M)$ vers $H^2(M)$.

Par ailleurs, on voit, par densité, que si $f \in H^2(M)$ et $g \in H^1(M)$, alors

$$\int_M \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} g\rangle = \int_M \triangle f g$$

On peut alors appliquer cela à $f = g = T\phi$, et on obtient directement l'inégalité

$$\|T\phi\|^2_{H^1(M)} \leq \|\phi\|\|T\phi\|$$

d'où

$$\|T\phi\|_{H^1(M)} \leq \|\phi\|$$

Ainsi, ϕ est un opérateur continu de $(L^2(M), \|\cdot\|)$ vers $(H^1(M), \|\cdot\|_{H^1(M)})$ Comme, de plus, l'injection de $(H^1(M), \|\cdot\|_{H^1(M)})$ dans $(L^2(M), \|\cdot\|)$ est compacte (théorème de Rellich), T est un opérateur compact de $L^2(M)$ vers lui-même. De plus, T est auto-adjoint positif, et injectif.

Donc il existe une base orthonormale de $L^2(M)$ de vecteurs propres de T. Ce sont clairement aussi des vecteurs propres pour le laplacien, donc, à nouveau par le lemme de régularisation, ils sont dans $H^s(M)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$, et donc ils sont C^∞, en utilisant le lemme de Sobolev : $H^(s + 1 + E(n/2))(M) \subset C^s(M)$, où n est la dimension de M.

Le spectre d'une variété riemannienne est un invariant important, difficile à calculer en général. Mentionnons le problème inverse : une variété riemannienne est-elle déterminée, à isométrie près, par son spectre ? La réponse est négative.

3. Laplacien sur les tores

Commençons par un exemple très simple : $\mathbb{R}/2\pi r\mathbb{Z}$. D'abord on regarde sur $\mathbb{R}$ (non compact). Notons D la dérivation : $\triangle = -D^2$. Pour tout λ, le noyau $-D^2_\lambda$ est de dimension 2 : ce sont les solutions de l'équation différentielle $u" + \lambda u = 0$. Pour $\lambda = -a^2 < 0$, une base des solutions est $(t \mapsto e^{at}, t \mapsto e^{-at})$. Les solutions non nulles sont non bornées, donc non périodiques. Si $\lambda = 0$, les solutions sont les fonctions affines, celles qui sont constantes sont périodiques. Si $\lambda = a^2 > 0$, une base des solutions est $(t \mapsto \cos(at), t \mapsto \sin(at))$. Les solutions non nulles sont de période minimale a. On déduit de tout ça :

$$Spec(\mathbb{R}/2\pi r\mathbb{Z}) = \{0, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2}, \frac{4}{r^2}, \frac{4}{r^2}, \frac{9}{r^2}, \dots\}$$

On arrive à un résultat analogue dans le cas d'un tore $E/2\pi\Gamma$, E euclidien et Γ réseau de E. Il est confortable de regarder des fonctions à valeurs complexes. Soit $l \in E^*$ et $u_l(x) = e^{il(x)}, x \in E$. Un calcul direct donne $\triangle u_l = \|l\|^2 u_l$. On voit immédiatement que u_l est $2\pi\Gamma$-périodique si et seulement si $l \in \Gamma^* = \{l' \in E^*, l'(\Gamma) \subset \mathbb{Z}\}$, le réseau dual de Γ. La famille des $u_l, l \in \Gamma^*$ étant stable par multiplication, l'espace vectoriel qu'elle engendre est une algèbre, qui, grâce au théorème de Stone-Weierstrass, est dense dans $L^2(E/2\pi\Gamma)$. On a donc trouvé une famille orthonormale de vecteurs propres du laplacien, et $\mathrm{Spec}(E/2\pi\Gamma)$ est égal à

$$\{\|l\|^2, l \in \Gamma^*\} \quad (\Gamma^* \text{ indexé de façon que les normes croissent})$$

On a l'équivalence, quand $k \to \infty$: $\lambda_k = (\frac{1}{V_n \mathrm{Vol}(\Gamma)} k)^{\frac{2}{n}}$, où V_n est le volume de la boule unité d'un espace euclidien de dimension n, $\mathrm{Vol}(\Gamma)$ le volume de E/Γ, et $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \dots$ le spectre ordonné et tenant compte des multiplicités.

Mentionnons l'exemple de Milnor de tores isospectraux non isométriques en dimension 16. Soit $\Gamma(n)$ le réseau de $\mathbb{R}^n$ engendré par $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n, \sum x_i \in 2\mathbb{Z}\}$ et $(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$. Ses propriétés élémentaires sont données en exercice :

Exercice 3.1.
- Si n est pair, $\mathrm{Vol}(\Gamma(n)) = 1$.
- Si $n \in 8\mathbb{Z}$, alors, pour tout $y \in \Gamma(n)$, $\|y\|^2 \in 2\mathbb{Z}$, et $\Gamma(n)^* = \Gamma(n)$.
- $\Gamma(8)$ est engendré par ses éléments de norme $\sqrt{2}$.
- $\Gamma(16)$ n'est pas engendré par ses éléments de norme $\sqrt{2}$.
- $\Gamma(8) \times \Gamma(8)$ et $\Gamma(16)$ sont non isométriques.

On montre que deux réseaux de dimension 8, 12, 16, ou 20 vérifiant les conditions $\|y\|^2 \in 2\mathbb{Z}, y \in \Gamma$, et $\Gamma^* = \Gamma$ sont isospectraux. Donc $\Gamma(8) \times \Gamma(8)$ et $\Gamma(16)$ sont isospectraux bien que non isométriques.

À l'aide de ce qui précède, des tores isospectraux de dimension 8 ont été rapidement construits après l'exemple de Milnor. Récemment (Schiemann, 1990), on en a trouvé de dimension 4. D'autre part, il est connu depuis longtemps que les tores sont déterminés par leur spectre en dimension 2 (le vérifier en exercice). Le même résultat est vrai, mais autrement plus difficile pour des tores de dimension 3 (Schiemann, 1997).

4. Laplacien sur les sphères

Soit $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \sum x_i^2 = 1\}$. On rappelle (mais on n'en aura pas besoin), que S^n est l'unique (à isométrie près) variété riemannienne complète simplement connexe à courbure constante 1. On aura besoin de

Lemme 4.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un ouvert contenant S^n. On note, si f est définie sur Ω, $\widetilde{f}$ sa restriction à S^n. Alors, si f est C^2, on a*

$$\triangle \widetilde{f} = \widetilde{\triangle f} + \widetilde{\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}} + n \widetilde{\frac{\partial f}{\partial r}}$$

On applique cette formule si $P = P(X_0, \dots, X_n)$ est un polynôme homogène de degré k harmonique. On obtient immédiatement que $\widetilde{P}$ est une fonction propre pour le laplacien de la sphère, pour la valeur propre $k(k+n-1)$.

On note $\mathcal{P}_k$ l'ensemble des polynômes homogènes de degré k sur $\mathbb{R}^{n+1}$, et $\mathcal{H}_k$ l'ensemble des polynômes harmoniques de $\mathcal{P}_k$.

Proposition 4.2. *Pour tout $k \geq 0$ on a*
- $\mathcal{P}_{2k} = \mathcal{H}_{2k} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-2} \oplus \cdots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_0$
- $\mathcal{P}_{2k+1} = \mathcal{H}_{2k+1} \oplus r^2\mathcal{H}_{2k-1} \oplus \cdots \oplus r^{2k}\mathcal{H}_1$

Avant de prouver cette proposition, déduisons-en

Théorème 4.3. *Le spectre de S^n, $(n \geq 1)$ est l'ensemble des $\mu_k = k(k+n-1)$, et le sous-espace propre associé à λ_k est $\widetilde{\mathcal{H}_k}$.*

En effet, la proposition donne, en restreignant à la sphère :
- $\widetilde{\mathcal{P}_{2k}} = \widetilde{\mathcal{H}_{2k}} \oplus \widetilde{\mathcal{H}_{2k-2}} \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathcal{H}_0}$
- $\widetilde{\mathcal{P}_{2k+1}} = \widetilde{\mathcal{H}_{2k+1}} \oplus \widetilde{\mathcal{H}_{2k-1}} \oplus \cdots \oplus \widetilde{\mathcal{H}_1}$

Or, par Stone-Weierstrass, on sait que $\bigoplus \widetilde{\mathcal{P}_k}$ est dense dans $L^2(S^n)$. Comme les relation ci-dessus établissent $\bigoplus \widetilde{\mathcal{P}_k} = \bigoplus \widetilde{\mathcal{H}_k}$, ce dernier est aussi dense. Par conséquent on a obtenu tout le spectre.

Prouvons la proposition par récurrence. Il faut montrer que si $\widetilde{P}$ est un élément de $\widetilde{\mathcal{P}_{k+2}}$ orthogonal à $\widetilde{\mathcal{P}_k}$, alors P est harmonique. Par hypothèse de récurrence, il suffit de montrer que $\widetilde{\triangle P}$ est orthogonal à tous les $\widetilde{\mathcal{H}_{k-2l}}$. Soit donc $H \in \mathcal{H}_{k-2l}$. Comme P est homogène, on peut écrire $\triangle\widetilde{P} = \widetilde{\triangle P} + \lambda\widetilde{P}$; on écrit aussi $\triangle\widetilde{H} = \mu\widetilde{H}$. On a

$$0 = \int_{S^n} \triangle(\widetilde{PH}) = \int_{S^n} \triangle\widetilde{P}.\widetilde{H} + 2\int_{S^n} \langle \mathrm{grad}\widetilde{P}, \mathrm{grad}\widetilde{H}\rangle + \int_{S^n} \widetilde{P}\triangle\widetilde{H}$$

$$\text{soit } 0 = \int_{S^n} \triangle\widetilde{P}.\widetilde{H} - \int_{S^n} \widetilde{P}\triangle\widetilde{H}$$

par la propriété d'adjonction, soit encore

$$0 = \int_{S^n} \widetilde{\triangle P}.\widetilde{H} - \lambda\int_{S^n} \widetilde{P}\widetilde{H} + \mu\int_{S^n} \widetilde{P}\widetilde{H} = \int_{S^n} \widetilde{\triangle P}.\widetilde{H}$$

puisque $\widetilde{P}$ et $\widetilde{H}$ sont orthogonaux.

Remarque 4.4. La dimension de $\mathcal{P}_k$ est $\binom{n+k}{n}$, et on en déduit que celle de $\mathcal{H}_k$ est $\binom{k+n-1}{n-1}\frac{2k+n+1}{k+n+1}$. Si le spectre est donné par la suite croissante $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$, alors on a l'équivalence, pour $k \to \infty$: $\lambda_k \sim (\frac{n!}{2}k)^{\frac{2}{n}}$.

Le comportement est très différent sur les variétés non compactes. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, tout nombre complexe est valeur propre du laplacien. Il en est de même sur le demi-plan de Poincaré $\mathbf{H}$, où le laplacien est donné par $\triangle = -y^2(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$: si $\lambda = s(1-s)$, alors $f(x+iy) = y^s + y^{1-s}$ est fonction propre pour λ.

Par contre, la théorie est essentiellement la même si on regarde, sur une variété riemannienne à bord, les fonctions nulles au bord : par exemple un ouvert borné d'un espace affine.

5. N'importe quoi

Le laplacien est donné (sauf erreur de calcul) sur le disque hyperbolique par : $\triangle = -(1-z\bar{z})^2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ Comme une fonction propre du laplacien est forcément analytique, elle s'écrit, au voisinage de 0 :

$$u(z) = \sum_{p,q} a_{p,q} z^p \bar{z}^q$$

où (p,q) parcourt $\mathbb{N}^2$ (mais on l'étend sur $\mathbb{Z}^2$ en posant $a_{p,q} = 0$ si $(p,q) \notin \mathbb{N}^2$). L'équation

$$\triangle u = \lambda u$$

donne la relation de récurrence

$$pqa_{p,q} = (2(p-1)(q-1) - \lambda)a_{p-1,q-1} - (p-2)(q-2)a_{p-2,q-2}$$

Notons que cette relation de récurrence rend indépendantes les droites $(p - q = r)$, r constante. L'ensemble des $a_{p,q}$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $pq = 0$ peut être choisi arbitrairement (tant qu'on ne se pose pas de problème de convergence) et détermine entièrement la suite $(a_{p,q})$. Si on isole une droite, disons $p - q = r$, on regarde les solutions de la forme $u(z) = z^r U(z\bar{z})$. On trouve que l'équation $(\triangle u = \lambda u)$ équivaut à l'équation différentielle

$$(1-x)(xU''(x) + (r+1)U'(x)) + \lambda U(x) = 0$$

Solution : fonction hypergéométrique $F(\alpha, \beta; 0, 1-z)$? ? ? ? où $\alpha + \beta = r$ et $\alpha\beta = -\lambda$.

Référence

Berger M., Gauduchon P., Mazet E. (1971) *Le Spectre d'une Variété Riemannienne.* Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 194.