Séminaire BOURBAKI Janvier 2013
65ème année, 2012-2013, n^{o} 1064

GROUPES PLEINS-TOPOLOGIQUES [d'après Matui, Juschenko, Monod, ...]

par **Yves de CORNULIER**

1. INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de décrire la construction récente et élégante de groupes infinis de type fini, simples et moyennables. Elle découle du théorème ci-dessous. On appelle *espace de Cantor* un espace homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor. Soit φ un autohoméomorphisme d'un espace de Cantor X, c'est-à-dire un homéomorphisme de X sur lui-même. On suppose φ minimal, au sens où toutes ses orbites sont denses. Par définition, son groupe *plein-topologique* $[\![\varphi]\!]$, est le groupe (discret !) des autohoméomorphismes de X qui coïncident localement avec une puissance de φ (voir au §2.2 une définition plus générale et plus détaillée).

Théorème. — *Le groupe plein-topologique* $[\![\varphi]\!]$ *est infini, ainsi que son sous-groupe dérivé* $[\![\varphi]\!]'$ *; de plus*

— (Matui, 2006) *le groupe dérivé* $[\![\varphi]\!]'$ *est un groupe simple ;*

— (Matui, 2006) *si* φ *est un sous-décalage topologique (voir §2.1), alors le groupe dérivé* $[\![\varphi]\!]'$ *est un groupe de type fini ;*

— (Juschenko–Monod, 2012 ; conjecturé par Grigorchuk–Medynets [GrMe12]) *le groupe* $[\![\varphi]\!]$ *est moyennable (et donc* $[\![\varphi]\!]'$ *aussi).*

Le groupe plein-topologique $[\![\varphi]\!]$ est un cas particulier d'une construction de W. Krieger (1980) [Kri80, p. 88] mais n'y est pas étudié dans le cas d'une action d'un autohoméomorphisme minimal. Il est ensuite [(1)] implicitement introduit, dissimulé sous le nom « Γ », en termes de C^*-algèbres par Putnam (1989) [Pu89, Sec. 5], en étudiant dans un cadre topologique des objets introduits par Vershik [Ve81, Ve82] dans un contexte mesurable. Le groupe plein-topologique d'un autohoméomorphisme minimal est ensuite étudié de manière systématique par E. Glasner et B. Weiss [GlW95] (sous le nom « groupe plein-fini »), Skau [Sk97] et surtout Giordano, Putnam et Skau (1999)

1. *(Ajout, février 2020)* Štěpánek et Rubin (1989) [SR] ont également introduit le groupe plein-topologique d'un sous-groupe d'autohoméomorphismes d'un espace compact totalement séparé : voir l'appendice B.

dans [GPS99] (et déjà, de manière implicite mais profonde, dans l'article important [GPS95]). Ces derniers montrent notamment, en utilisant un résultat de Boyle [Bo83], que la classe d'isomorphie du groupe $[\![\varphi]\!]$ caractérise la paire $\{\varphi, \varphi^{-1}\}$ à conjugaison près dans le groupe des autohoméomorphismes de l'espace de Cantor. Ceci a été étendu à $[\![\varphi]\!]'$ par Bezuglyi et Medynets [BeM08], avec une méthode plus directe. De l'existence d'un continuum d'autohoméomorphismes minimaux de l'espace de Cantor deux à deux non conjugués et qui sont des sous-décalages (par exemple, associés aux rotations irrationnelles, voir l'exemple plus bas), il découle que les groupes simples de type fini obtenus $[\![\varphi]\!]'$ forment également un continuum de classes d'isomorphie.

Moyennabilité

Un groupe Γ est *moyennable* s'il possède une moyenne (c'est-à-dire une probabilité finiment additive définie sur toutes les parties) invariante par translations à gauche. Un des intérêts de la moyennabilité est qu'elle peut aussi bien être caractérisée de manière analytique, probabiliste, dynamique et géométrique. à titre d'illustration, en voici diverses caractérisations équivalentes (qu'il n'est pas nécessaire de déchiffrer pour comprendre la suite ; voir notamment [Gre, Eym, Pat]).

— Γ admet des parties presque invariantes : pour toute partie finie $S \subset \Gamma$ et $\varepsilon > 0$ il existe une partie finie non vide F de Γ telle que $\#(SF \smallsetminus F)/\#F \leq \varepsilon$.
— Toute action de Γ par autohoméomorphismes sur un espace compact non vide préserve une mesure de probabilité invariante sur les boréliens.
— Toute action affine continue de Γ sur un convexe compact non vide d'un espace localement convexe admet un point fixe.
— Γ n'admet pas de décomposition paradoxale (voir remarque 2.2).
— La représentation régulière de Γ sur $\ell^2(\Gamma)$ admet des vecteurs unitaires presque invariants.
— L'algèbre de Banach $\ell^1(\Gamma)$ est nucléaire.
— L'algèbre de von Neumann de Γ est hyperfinie.
— Le morphisme canonique de la C^*-algèbre maximale de Γ vers sa C^*-algèbre réduite est un isomorphisme.
— Pour toute mesure de probabilité symétrique à support fini $S \subset \Gamma$ contenant 1, la marche aléatoire donnée au temps n par multiplication à droite par un élément choisi au hasard dans S, a une probabilité de retour en 1 décroissant sous-exponentiellement vers 0.

Les groupes moyennables constituent une classe stable par passage aux sous-groupes, quotients, extensions et limites directes. La plus petite classe de groupe stable par ces opérations contenant les groupes finis et abéliens est appelée classe des groupes *élémentairement moyennables*. De fait, ce sont les exemples « immédiats » de groupes moyennables, comprenant notamment les groupes virtuellement résolubles (c'est-à-dire, ayant un sous-groupe d'indice fini résoluble). Cependant, il est facile de vérifier que tout groupe de type fini élémentairement moyennable et non trivial admet un quotient fini non trivial (et, s'il est infini, admet un quotient infini virtuellement abélien non trivial), si bien que ces groupes sont très loin d'être simples. S'il est connu depuis le début de l'étude de la croissance des groupes que tout groupe de croissance sous-exponentielle est moyennable, les premiers exemples non triviaux (à croissance dite intermédiaire) ont été obtenus par Grigorchuk en 1984 [Gri84]. Ce sont les premiers exemples connus de groupes moyennables et non élémentairement moyennables. Ce sont des groupes d'automorphismes d'arbres enracinés de degré fini et à ce titre ils sont résiduellement finis (et donc loin d'être simples). La plus petite classe de groupes stable par les opérations décrites précédemment contenant les groupes à croissance sous-exponentielle est appelée classe des groupes *sous-exponentiellement moyennables* ; elle contient les groupes élémentairement moyennables mais est strictement plus grosse puisqu'elle contient également les groupes à croissance intermédiaire. Les premiers exemples de groupes moyennables mais pas sous-exponentiellement moyennables, comprenant le « groupe de la basilique », ont été introduits par Grigorchuk et Zuk [GrZu02] ; leur moyennabilité a été démontrée par Bartholdi et Virag [BV05], en utilisant les marches aléatoires ; ils sont également résiduellement finis. Leur méthode a été largement généralisée et étendue [Kai05, Ers06, Bri09, BKN10], par des méthodes également basées sur les marches aléatoires et s'appliquant à des groupes agissant naturellement sur des arbres enracinés de valence finie.

On ne connaissait pas, précédemment, de groupe de type fini moyennable non trivial sans quotient fini non trivial, et donc, a fortiori, aucun qui soit infini et simple. Les exemples $[\![\varphi]\!]'$ sont à croissance exponentielle, par un résultat de Matui [Ma12], et il en découle immédiatement qu'ils ne sont pas sous-exponentiellement moyennables (voir le fait A.2).

Le critère de moyennabilité utilisé par Juschenko et Monod [JM12] est le suivant. Rappelons qu'une permutation σ de $\mathbf{Z}$ est à *déplacement borné* si $|\sigma(n) - n|$ est borné indépendamment de $n \in \mathbf{Z}$, et que deux parties $A, B \subset \mathbf{Z}$ sont *commensurables* si la différence symétrique $A \triangle B$ est finie.

Théorème (Critère de Juschenko-Monod). — *Soit Γ un groupe agissant sur $\mathbf{Z}$ par permutations à déplacement borné. On suppose que le stabilisateur de $\mathbf{N}$ est moyennable. Alors Γ est moyennable.*

Dans le cas d'un autohoméomorphisme minimal d'un espace de Cantor, le théorème précédent s'applique à $[\![\varphi]\!]$, qui agit sur $\mathbf{Z}$ via l'identification de $\mathbf{Z}$ à une orbite d'un élément quelconque x_0 dans l'espace de Cantor : $\psi \cdot n$, pour $\psi \in [\![\varphi]\!]$ et $n \in \mathbf{Z}$, est l'unique entier m tel que $\psi(\varphi^n(x_0)) = \varphi^m(x_0)$. Putnam ayant montré [Pu89] que le stabilisateur dans $[\![\varphi]\!]$ de toute orbite positive $\{\varphi^n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ est localement fini (au sens où toute partie finie engendre un sous-groupe fini), le théorème implique que $[\![\varphi]\!]$ est moyennable.

Exemples

Un exemple explicite de sous-décalage minimal φ s'obtient comme ceci : on considère un irrationnel α et on considère, sur le cercle $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, la rotation $r_\alpha : z \mapsto z + \alpha$. On peut définir un espace $[\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}$, homéomorphe à l'espace de Cantor, muni d'une projection sur le cercle par laquelle la rotation r_α se relève canoniquement en un autohoméomorphisme minimal $\varphi = \tilde{r}_\alpha(x)$. Une manière de l'obtenir est de remplacer chaque point x de l'orbite $\mathbf{Z}\alpha \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ par une paire $\{x^-, x^+\}$, et de munir l'espace ainsi obtenu de l'ordre cyclique évident et de la topologie associée. Ainsi si $x \notin \mathbf{Z}\alpha$, on définit $\tilde{r}_\alpha(x) = x + \alpha$ et si $x \in \mathbf{Z}\alpha$ on définit $\tilde{r}_\alpha(x^\pm) = (x + \alpha)^\pm$; l'espace $[\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}$ est métrisable, compact, non vide, totalement discontinu et sans point isolé et donc est homéomorphe à l'espace de Cantor ; l'autohoméomorphisme $\tilde{r}_\alpha$ est minimal. On vérifie alors que pour tout $\varepsilon \in \mathbf{Z}\alpha \cap \,]0, 1/2[\,\subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, les translatés de l'ouvert fermé $[0^+, \varepsilon^-]$ séparent les points de $[\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}$, si bien que $([\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}, \varphi_\alpha)$ est un sous-décalage (voir le fait 2.1.2). Cette construction est due à Keane [Kea75, §5] et le groupe plein-topologique associé est considéré spécifiquement par Matui dans [Ma06, Example 6.2]. Notons que r_α est uniquement ergodique (théorème d'équidistribution de Kronecker-Weyl, voir [KH, Proposition 4.2.1]) et les valeurs propres de l'opérateur unitaire associé sur $L^2([\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha}) = L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ sont les $e^{2i\pi n\alpha}$ pour $n \in \mathbf{Z}$; en particulier les groupes cycliques $\langle r_\alpha \rangle \subset \mathrm{Homeo}([\mathbf{R}/\mathbf{Z}]_{\mathbf{Z}\alpha})$ pour α irrationnel dans $[0, 1/2]$ sont deux à deux non conjugués et donnent donc, par le résultat de Boyle et Giordano-Putnam-Skau, des groupes pleins-topologiques deux à deux non isomorphes.

L'exemple précédent est sous-groupe du groupe IET des échanges d'intervalles, introduit par Keane [Kea75], habituellement défini comme l'ensemble des translations par morceaux continues à droite de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ mais qui, comme Keane l'a observé [Kea75, §5], peut s'interpréter comme groupe d'autohoméomorphismes d'un compact totalement discontinu. La question de la moyennabilité du groupe entier IET est ouverte. La résoudre consisterait à démontrer un résultat de moyennabilité pour des groupes pleins-topologiques associés à certaines actions de groupes abéliens de type fini. Cependant, le théorème de Juschenko-Monod ne se généralise pas sans hypothèse supplémentaire : une construction élémentaire dans [EM12] montre que le groupe plein-topologique associé à une action libre et minimale de $\mathbf{Z}^2$ sur un espace de Cantor peut contenir un groupe libre non abélien.

Plan

(Ci-dessous, φ est un autohoméomorphisme minimal de l'espace de Cantor.)

On va commencer par introduire les notions générales en détail, dans la partie 2 ; et énoncer quelques faits généraux (non spécifiques aux actions de $\mathbf{Z}$), notamment le fait 2.2.4 qui montre que les groupes pleins-topologiques contiennent « beaucoup » d'éléments de torsion et montre en particulier que $[\![\varphi]\!]'$ est un groupe infini.

La partie 3 contient les principaux résultats algébriques connus sur le groupe $[\![\varphi]\!]'$. En particulier, les résultats de Matui mentionnés plus haut sont établis au §3.1 pour la simplicité et au §3.2 pour la type-finitude dans le cas d'un sous-décalage minimal.

D'autres résultats sont prouvés au §3.4, notamment le résultat, également dû à Matui, que $[\![\varphi]\!]'$ n'est jamais de présentation finie, ainsi que le fait, dû à Grigorchuk et Medynets, qu'il n'est pas finiment approximable (définition 3.4.1). Au §3.5, on prouve le résultat, aussi dû à Matui, que pour un sous-décalage minimal infini, $[\![\varphi]\!]'$ contient un semi-groupe libre à 2 générateurs et est donc à croissance exponentielle.

La partie 4 contient le résultat de moyennabilité de Juschenko-Monod. Elle est indépendante de la précédente en ce qui concerne la preuve du critère. Le fait d'appliquer le critère est lui basé sur le lemme de Putnam, qui se trouve au §3.3.

à titre d'illustration de l'importance de l'hypothèse de minimalité dans certains des résultats ci-dessus, quelques exemples de groupes pleins-topologiques $[\![\varphi]\!]$ pour φ sous-décalage non minimal sont étudiés au §3.7.

Problèmes et questions ouvertes

On considère le groupe plein-topologique associé à un sous-décalage minimal infini sur $\mathbf{Z}$. Rappelons que son groupe dérivé $[\![\varphi]\!]'$ est, par un résultat de Matui, un groupe simple de type fini.

(1) Estimer la fonction de Følner de $[\![\varphi]\!]'$, peut-être en discutant sur φ. Rappelons qu'après choix d'un système générateur fini S symétrique et contenant 1, elle associe à $n \geq 1$ le nombre

$$\mathrm{Føl}(n) = \inf\{\#K \mid \#(SK \smallsetminus K)/\#(K) \leq 1/n\},$$

K parcourant les parties finies non vides du groupe. De même, estimer la fonction de Følner dans les boules

$$\mathrm{BFøl}(n) = \inf\{\mathrm{diam}(K) \mid \#(SK \smallsetminus K)/\#(K) \leq 1/n\}$$

et la probabilité de retour des marches aléatoires sur le graphe de Cayley de $[\![\varphi]\!]'$.

(2) Donner des résultats généraux sur la structure des sous-groupes de $[\![\varphi]\!]$. Par exemple :

(2a) étant moyennable, $[\![\varphi]\!]$ ne contient pas de sous-groupe libre non abélien. Donner une preuve directe de ce fait.

(2b) Est-ce que tous les sous-groupes de présentation finie (resp. résiduellement finis, resp. sans torsion) de $[\![\varphi]\!]'$ sont élémentairement moyennables ?

(2c) Est-il vrai que tout sous-groupe de type fini de $[\![\varphi]\!]$ est à croissance exponentielle ou polynomiale ? que tout sous-groupe infini de type fini possède un élément d'ordre infini ?

(2d) Est-il vrai que tout sous-groupe de $[\![\varphi]\!]$ soit contient un sous-groupe isomorphe à $[\![\psi]\!]$ (pour un autre sous-décalage minimal ψ), soit est élémentairement moyennable ? (Cela impliquerait une réponse positive à toutes les questions de (2b) et (2c).)

(2e) Peut-on donner des résultats généraux sur la structure des sous-groupes élémentairement moyennables de $[\![\varphi]\!]$?

(2f) Classifier les morphismes entre les différents groupes $[\![\varphi]\!]$ ou $[\![\varphi]\!]'$ (ici φ peut être plus généralement un autohoméomorphisme minimal d'un espace de Cantor). En particulier, le groupe $[\![\varphi]\!]'$ a-t-il des endomorphismes injectifs non surjectifs (autrement dit, en termes savants, est-il non cohopfien) ? [Le cas des isomorphismes et automorphismes est bien compris, principalement par les résultats de Giordano, Putnam et Skau [GPS99], voir §3.6.1.]

(3) Peut-on classifier les groupes $[\![\varphi]\!]'$ à quasi-isométrie près ? Peut-on caractériser les groupes (de type fini, ou plus généralement localement compacts et compactement engendrés) qui leur sont quasi-isométriques ?

(4) Est-ce que $[\![\varphi]\!]'$ admet une action propre sur un complexe cubique CAT(0) (sans hypothèse de dimension finie) ? Peut-on déterminer les sous-groupes de codimension 1 dans les groupes $[\![\varphi]\!]'$? Rappelons qu'un sous-groupe H est dit de codimension 1 si le graphe de Schreier $[\![\varphi]\!]'/H$ a au moins 2 bouts, voir par exemple Sageev [Sag97]. Les stabilisateurs dans $[\![\varphi]\!]'$ des points de X sont de codimension 1 puisque le graphe de Schreier est quasi-isométrique à $\mathbf{Z}$.

(5) Est-ce que le groupe $[\![\varphi]\!]$ a une complexité de décomposition finie ? (Voir [GTY10].)

(6) Le groupe $[\![\varphi]\!]'$ contient-il un arbre régulier trivalent quasi-isométriquement plongé ? un semi-groupe libre quasi-isométriquement plongé ?

(7) Le groupe $[\![\varphi]\!]'$ a-t-il une croissance exponentielle uniforme ? A-t-il un diamètre semi-libre (resp. sans torsion) uniforme (c'est-à-dire, existe-t-il un entier N tel que pour tout système générateur, la N-boule contient un couple d'éléments engendrant librement un semi-groupe libre (resp. contient un élément sans torsion) ?

(8) Soit s_φ cardinal minimal d'une famille génératrice de $[\![\varphi]\!]'$. Existe-t-il des sous-décalages minimaux avec s_φ arbitrairement grand ?

Remerciements. Je remercie Mikael de la Salle pour une simplification substantielle de la preuve de la proposition 4.3.1 et Pierre Py pour une correction dans la preuve du théorème 3.1.6. Je suis reconnaissant envers toutes les personnes m'ayant signalé diverses coquilles, omissions ou imprécisions, et notamment Laurent Bartholdi, Pierre de la Harpe et Ralph Strebel pour leur relecture critique attentive. Je remercie Hiroki Matui et Jean-François Quint pour des discussions utiles.

2. SOUS-DÉCALAGES ET GROUPES PLEINS-TOPOLOGIQUES

2.1. Sous-décalages et odomètres

Si X est un espace topologique, on note $\mathrm{Homeo}(X)$ le groupe des homéomorphismes de X sur lui-même, ou *autohoméomorphismes* de X. On considère un espace topologique X muni d'une action par autohoméomorphismes d'un groupe discret Γ ; on parlera souvent du couple (Γ, X).

On supposera souvent que X est *totalement séparé*, au sens où les fonctions continues de X vers les espaces discrets séparent les points de X, ou de manière équivalente, les clouverts de X forment une base de la topologie ; c'est un peu plus fort que totalement discontinu (voir [SS, Ex. 129] pour un contre-exemple sous-ensemble du plan « tipi de Cantor épointé »), et équivalent pour des espaces localement compacts [Bou, II.§4, cor. de la prop. 6].

Commençons par introduire des exemples fondamentaux.

DÉFINITION 2.1.1. — *Soit $d \in \mathbf{N}^*$, soient A_d un alphabet à d lettres et Γ un groupe discret quelconque. L'espace A_d^Γ, muni de la topologie produit, est compact totalement séparé (si $d \geq 2$ et Γ est infini dénombrable, il est homéomorphe à un espace de Cantor). Il admet une action naturelle de Γ par décalage : si f est une fonction de Γ dans A_d et $g \in \Gamma$, on définit $g \cdot f$ par $g \cdot f(\gamma) = f(g^{-1}\gamma)$. Muni de l'action de Γ, l'espace A_d^Γ est appelé décalage (à d lettres) sur Γ. Un fermé Γ-invariant est appelé* sous-décalage topologique *à d lettres sur Γ (on omettra systématiquement l'adjectif topologique). Par extension et abus de langage, un espace X muni d'une action de Γ par autohoméomorphismes sera appelé* sous-décalage *s'il est homéomorphe, de manière Γ-équivariante, à un sous-décalage au sens ci-dessus. Lorsqu'on parlera de décalage ou sous-décalage, on supposera toujours implicitement le nombre de lettres fini.*

Le fait suivant donne une caractérisation élémentaire et très utile des sous-décalages. On rappelle qu'un *clouvert* est par définition un ouvert fermé. On note $\mathrm{Clo}(X)$ l'ensemble des clouverts de X, qui est une sous-algèbre booléenne de 2^X.

FAIT 2.1.2. — *Un espace X muni d'une action de Γ par autohoméomorphismes est un sous-décalage si et seulement si X est compact et il existe une partition finie de X en clouverts, dont les Γ-translatés séparent les points. Plus précisément, il est homéomorphe, de manière Γ-équivariante, à un sous-décalage à d lettres si et seulement s'il existe une partition de X en (au plus) d clouverts, dont les Γ-translatés séparent les points.*

Remarque 2.1. — La condition du fait 2.1.2 sur la partition se reformule en disant que l'algèbre booléenne $\mathrm{Clo}(X)$ est de type fini comme algèbre munie d'une action de Γ ; la condition plus précise dit qu'elle est engendrée par $d-1$ éléments disjoints.

Démonstration du fait 2.1.2. — Dans un sens, on remarque que, dans A_d^Γ, les translatés des clouverts $\Omega_i = \{w \in A_d^\Gamma \mid w(1) = i\}$, pour $i \in A_d$, séparent les points. Réciproquement, si $X = \bigsqcup_{i=1}^d X_i$ avec X_i clouvert, on définit, pour $x \in X$, la lettre $\iota(x)$ comme l'unique $i \in A_d$ tel que $x \in X_i$; alors on remarque que l'application continue Γ-équivariante

$$\begin{array}{rcl} \Psi : X & \to & A_d^\Gamma \\ x & \mapsto & (\iota(\gamma^{-1}x))_{\gamma\in\Gamma} \end{array}$$

est injective si et seulement si les translatés de la partition (X_i) séparent les points. La compacité de X implique que Ψ est un homéomorphisme sur son image, qui est un fermé Γ-invariant de A_d^Γ. □

On a un autre type d'exemple, en un certain sens diamétralement opposé.

Définition 2.1.3. — *On dit que* (Γ, X) *est un* odomètre *si* X *est compact totalement séparé, et si l'action de* Γ *sur l'ensemble* $\mathrm{Clo}(X)$ *des clouverts de* X *a toutes ses orbites finies.*

Un exemple prototypique est l'action par addition de $\mathbf{Z}$ sur l'anneau des nombres entiers p-adiques $\mathbf{Z}_p$; il est souvent décrit de manière plus explicite, l'action du générateur positif de $\mathbf{Z}$ consistant à effectuer effectivement l'addition de 1 à un entier p-adique, en posant les retenues !

Fait 2.1.4. — *Soit* X *un espace topologique muni d'une action par autohoméomorphismes de* Γ*. équivalences :*

(i) X *est un odomètre ;*

(ii) X *est compact totalement séparé et toute application équivariante continue de* X *vers un sous-décalage a une image finie ;*

(iii) X *est une limite projective filtrante de* Γ*-ensembles finis.*

Si de plus X *admet une* Γ*-orbite dense, (iii) se reformule en :*

(iii') X *est isomorphe, comme espace topologique muni d'une action de* Γ *(et canoniquement, après choix d'un point de* X *dont l'orbite est dense) au quotient à droite* $\hat{\Gamma}/K$ *du complété profini de* Γ *par un sous-groupe fermé* K*.*

Si en outre Γ *est abélien, alors cela se reformule encore en*

(iii") X *s'identifie (après choix d'un point de* X*) à un groupe abélien muni d'un morphisme d'image dense émanant de* Γ*.*

Démonstration. — (iii)⇒(i) est immédiat. Faisons sa réciproque : pour toute partie finie I de $\mathrm{Clo}(X)$, on peut considérer l'union $J(I)$ des Γ-orbites des éléments de I, qui est encore finie par hypothèse et définir X_I comme le quotient de X par la partition définie par l'algèbre booléenne engendrée par $J(I)$, c'est un Γ-ensemble, quotient de X. Clairement toute inclusion $I \subset I'$ induit une application quotient $X_{I'} \to X_I$. L'application naturelle de X vers la limite projective des X_I (I parcourant les parties finies de Clo(X)) a donc une image dense ; comme X est totalement séparé, cette application est injective ; par compacité c'est donc un homéomorphisme.

Pour (i)⇒(ii), il suffit de montrer qu'un sous-décalage $X \subset A^\Gamma$ qui est un odomètre est nécessairement fini. Par hypothèse, il existe un sous-groupe d'indice fini Λ de Γ tel que pour tout $a \in A$, en notant $\Omega_a = \{w \in X : w(1) = a\}$, on a $g\Omega_a = \Omega_a$ pour tout $g \in \Lambda$. On en déduit que X est constitué de suites Λ-périodiques à droite (et est donc fini) : en effet, on voit dans un premier temps que $w(\lambda) = w(1)$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $w \in X$. Puis si $g \in G$, comme $g^{-1}w \in X$, on a $g^{-1}w(\lambda) = g^{-1}w(1)$, autrement dit $w(g\lambda) = w(g)$.

Réciproquement, si X n'est pas un odomètre, il existe un clouvert Ω dont la Γ-orbite est infinie. La construction du fait 2.1.2 fournit une application équivariante continue vers le décalage $\{0, 1\}^\Gamma$, d'image infinie.

L'assertion supplémentaire (iii') implique évidemment (iii) en écrivant K comme intersection filtrante décroissante de sous-groupes ouverts d'indice fini. Réciproquement, supposons que X est limite projective filtrante de Γ-ensembles finis X_i. En fixant un point w dont l'orbite est dense, on peut identifier chaque X_i à un espace quotient $\hat{\Gamma}/\Lambda_i$ avec Λ_i ouvert d'indice fini. L'application naturelle de $\hat{\Gamma}/\bigcap \Lambda_i$ vers la limite projective des $\hat{\Gamma}/\Lambda_i$ est continue, injective et d'image dense, donc est un homéomorphisme par compacité ; elle est Γ-équivariante.

Pour Γ abélien, pour obtenir (iii") à partir de (iii') (le sens inverse étant trivial), on remarque que K est distingué et le groupe $\hat{\Gamma}/K$ est bien un groupe muni d'un morphisme d'image dense émanant de Γ. □

2.2. Semi-groupes pleins et groupes pleins

Rappelons qu'une fonction *étagée* entre deux ensembles est une fonction dont l'image est finie.

Définition 2.2.1. — *Soit Γ un groupe discret agissant par autohoméomorphismes sur un espace topologique. On définit le* semi-groupe plein-topologique *associé à* (Γ, X) *comme*

$$[\![\Gamma, X]\!]_{\mathrm{s}} = \{f : X \to X : \ \exists \kappa : X \to \Gamma \text{ continue étagée } : \forall x \in X, \ f(x) = \kappa(x).x\}.$$

On dit que la fonction étagée κ ci-dessus est associée *à f.*

Notons que la précision que κ est étagée est superflue lorsque X est compact. Il est clair que $[\![\Gamma, X]\!]_{\mathrm{s}}$ est constitué d'applications continues $X \to X$, contient l'identité et est stable par composition, c'est donc bien un semi-groupe. Si l'action de Γ sur X est libre, ce qui sera souvent le cas par la suite, l'application κ associée à un élément f est uniquement déterminée par f, ce qui donne une bijection canonique entre $[\![\Gamma, X]\!]_{\mathrm{s}}$ et l'ensemble $\mathcal{C}_{\mathrm{et}}(X, \Gamma)$ des fonctions continues étagées $X \to \Gamma$. Ceci reste valable sous l'hypothèse plus faible que tout élément de Γ distinct de l'identité a un ensemble de points fixes d'intérieur vide dans X.

Remarquons déjà que si X est compact métrisable, et Γ dénombrable (on considère les ensemble finis comme dénombrables), alors $\mathcal{C}_{\mathrm{et}}(X,\Gamma)$ est dénombrable, et en particulier $[\![\Gamma,X]\!]_{\mathrm{s}}$ est dénombrable.

Définition 2.2.2. — *Le* groupe plein-topologique *de* (Γ, X) *est défini comme l'ensemble des éléments inversibles du semi-groupe* $[\![\Gamma,X]\!]_{\mathrm{s}}$ *; on le note* $[\![\Gamma,X]\!]$.

On peut remarquer que

$$[\![\Gamma,X]\!] = [\![\Gamma,X]\!]_{\mathrm{s}} \cap \mathrm{Homeo}(X).$$

En effet, on vérifie que pour $f \in \mathrm{Homeo}(X)$ donné par $f(x) = \kappa(x).x$, on a $f^{-1}(x) = \kappa(f^{-1}(x))^{-1}.x$ pour tout $x \in X$.

Lorsque $\Gamma \subset \mathrm{Homeo}(X)$ et X est fixé, il est commode d'écrire $[\![\Gamma]\!]_{\mathrm{s}}$ et $[\![\Gamma]\!]$. Il est souvent possible de s'y ramener, en remplaçant Γ par son image dans $\mathrm{Homeo}(X)$. Si Γ est engendré par un autohoméomorphisme φ, on écrit alors $[\![\varphi]\!]_{\mathrm{s}}$ et $[\![\varphi]\!]$. Dans une direction différente, le groupe Γ peut être fixé et l'espace X sur lequel il agit variable, et on écrit alors $[\![X]\!]_{\mathrm{s}}$ et $[\![X]\!]$.

Si $\Gamma \subset \mathrm{Homeo}(X)$, on a toujours $\Gamma \subset [\![\Gamma]\!]$. Remarquons que si X est connexe, alors toute application continue $X \to \Gamma$ est constante, de sorte que $[\![\Gamma]\!]_{\mathrm{s}} = [\![\Gamma]\!] = \Gamma$. Cette construction est donc surtout intéressante lorsque X est totalement séparé.

Le groupe $[\![\Gamma,X]\!]$ sera considéré ici comme un groupe discret. L'adjectif (quelque peu maladroit) « topologique » permet de distinguer $[\![\Gamma,X]\!]$ du *groupe plein* $[\Gamma,X] \subset \mathrm{Homeo}(X)$ défini comme le précédent, mais sans supposer l'application κ continue ou étagée. Le groupe plein est souvent beaucoup plus gros que le groupe plein-topologique.

Remarque 2.2. — On dit que le groupe Γ est paradoxal si, munissant Γ de l'action à gauche sur lui-même, il existe dans $[\![\Gamma,\Gamma]\!]_{\mathrm{s}}$ deux injections d'images disjointes. Le théorème de Tarski (voir [HS86]) dit que Γ est paradoxal si et seulement si Γ est non moyennable, et on peut alors même supposer que les images des deux injections précédentes partitionnent Γ.

On commence par quelques propriétés élémentaires et générales des groupes pleins-topologiques. En remarquant que les orbites de $[\![\Gamma]\!]$ sont contenues dans les Γ-orbites, on obtient :

Fait 2.2.3. — *Si* $\Gamma \subset \mathrm{Homeo}(X)$ *est un groupe fini (ou, plus généralement, a des orbites de cardinal borné), alors les orbites de* $[\Gamma]$ *sont de cardinal borné, de sorte que le groupe plein* $[\Gamma]$ *(et donc* $[\![\Gamma]\!]$*) est un groupe localement fini, d'exposant fini, car il se plonge dans un produit (infini) de groupes finis de cardinal borné.*

Notons que X est totalement séparé si et seulement si les clouverts séparent les points. Dans ce cas, on a

Fait 2.2.4. — *Si X est totalement séparé et si Γ agit sur X par autohoméomorphismes avec des orbites de cardinal non borné (par exemple, Γ a une orbite infinie), alors $[\![\Gamma]\!]$ contient, pour tout n, un sous-groupe isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (et contient même une copie du produit direct restreint $\bigoplus_{n\geq 1} \mathfrak{S}_n$). En particulier, le groupe $[\![\Gamma]\!]$ ne satisfait aucune loi (un groupe G satisfait une loi w, où $w(t_1, \ldots, t_k)$ est un élément non trivial du groupe libre à k générateurs, si $w(g_1, \ldots, g_k) = 1$ pour tous $g_1, \ldots, g_k$ dans G).*

Démonstration. — On considère des éléments distincts $x_1, \ldots, x_n$ dans une même Γ-orbite, disons $x_i = g_i x_1$. On choisit un voisinage clouvert U de x_1 tel que les $g_i U$ sont deux à deux disjoints. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation de $\{1, \ldots, n\}$, alors pour $x \in X$, on définit $T_\sigma(x) = g_{\sigma(i)} g_i^{-1} x \in g_{\sigma(i)} U$ si $x \in g_i U$, et $T_\sigma(x) = x$ si $x \notin \bigcup_i g_i U$. On vérifie immédiatement que $\rho : \sigma \mapsto T_\sigma$ est un morphisme injectif de $\mathfrak{S}_n$ dans $[\![\Gamma]\!]$.

Pour obtenir un plongement de $\bigoplus \mathfrak{S}_n$, on choisit simultanément $x_i^{(n)}$, $1 \leq i \leq n < \infty$ deux à deux distincts et, à n fixé, dans la même orbite, et on choisit les $U_i^{(n)}$ également deux à deux disjoints. Comme les $\rho^{(n)}(\mathfrak{S}_n)$ ont des supports deux à deux disjoints, ils commutent deux à deux et engendrent leur produit direct restreint.

Pour la dernière assertion, on utilise le fait qu'il n'existe aucune loi de groupe satisfaite simultanément par tous les groupes symétriques : en effet une telle loi serait satisfaite par tous les groupes finis, donc par les produits directs de groupes finis. Or les groupes libres, étant résiduellement finis [Sch27, p. 170], se plongent dans de tels produits. □

La preuve démontre en fait également

Corolaire 2.2.5. — *Si X est totalement séparé, alors $[\![\Gamma]\!]$ agit ∞-transitivement sur toute Γ-orbite, au sens où il agit transitivement, pour tout n, sur les n-uplets d'éléments distincts. De plus, le sous-groupe dérivé $[\![\Gamma]\!]'$ agit $(n-2)$-transitivement sur toute Γ-orbite de cardinal au moins n, et donc ∞-transitivement sur toute orbite infinie.*

En particulier, les $[\![\Gamma]\!]'$-orbites coïncident avec les Γ-orbites (qui sont aussi les $[\![\Gamma]\!]$-orbites), à l'exception des Γ-orbites à deux éléments.

En outre, si la réunion des Γ-orbites de cardinal au plus 4 est d'intérieur vide, alors le commutant de $[\![\Gamma]\!]'$ dans le groupe des permutations de X (et donc dans $\mathrm{Homeo}(X)$*) est trivial.*

Démonstration. — En effet, on a vérifié que pour toute partie P à n éléments de toute orbite, il existe une action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, via $[\![\Gamma]\!]$, qui induit l'action standard sur P.

En particulier, son sous-groupe dérivé, le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$, agit via $[\![\Gamma]\!]'$, qui agit donc $(n-2)$-transitivement.

Pour le commutant, on remarque que si on a trois points x, gx, hx distincts dans une même Γ-orbite, alors pour tout voisinage clouvert U de x assez petit, on a un élément de $[\![\Gamma]\!]'$ permutant cycliquement les clouverts disjoints U, gU et hU et agissant par l'identité ailleurs. En particulier, le commutant C de $[\![\Gamma]\!]'$ préserve $U \cup gU \cup hU$. Comme c'est vrai pour tout voisinage clouvert de x inclus dans U, on en déduit que C laisse invariant $\{x, gx, hx\}$. Maintenant s'il existe deux autres points $g'x, h'x$ dans l'orbite, le même argument montre que C laisse invariant $\{x, g'x, h'x\}$ et donc laisse invariant l'intersection de ces deux parties, à savoir $\{x\}$. Comme par hypothèse l'ensemble des x dont l'orbite a au moins 5 éléments est dense, cela prouve que C est réduit à l'identité. □

Ce fait implique également, par exemple, le corolaire suivant.

Corolaire 2.2.6. — *Sous les hypothèses du fait 2.2.4,* $[\![\Gamma]\!]$ *n'admet aucune représentation fidèle dans* $\mathrm{GL}_d(A)$*, où* A *est un anneau commutatif quelconque et* d *un entier arbitraire. Il en est de même pour* $[\![\Gamma]\!]'$.

Démonstration. — On fixe k assez grand, disons $k = k(d) = \max(5, 4d^2)$. Montrons que pour tout anneau commutatif A, il n'y a aucun morphisme non trivial de $\mathfrak{A}_{k(d)}$ vers $\mathrm{GL}_d(A)$. On remarque d'abord que le groupe alterné $\mathfrak{A}_k$ contient d^2 paires d'éléments, chacune des paires ne commutant pas, mais commutant avec toutes les autres. Il en découle aisément (voir [Ab06], à qui cette astuce est due) que tout morphisme injectif de $\mathfrak{A}_k$ dans GL_m d'un corps envoie ces $2d^2$ éléments sur une famille linéairement libre, impliquant en particulier que $m > d$. Donc, par simplicité, tout morphisme de $\mathfrak{A}_k$ dans GL_d d'un corps est trivial.

Comme tout anneau commutatif réduit se plonge dans un produit de corps, on en déduit que tout morphisme de $\mathfrak{A}_k$ dans $\mathrm{GL}_d(A)$, pour A anneau commutatif, a son image dans le noyau de $\mathrm{GL}_d(A) \to \mathrm{GL}_d(A/N)$, où N est le nilradical de A. Or ce noyau est un groupe localement nilpotent, puisqu'il est nilpotent quand A est un anneau commutatif de type fini ou plus généralement noethérien. Donc l'image du groupe simple non abélien $\mathfrak{A}_k$ dans $\mathrm{GL}_d(A)$ est en fait triviale.

Les sous-groupes $\mathfrak{A}_k$ étant simples non abéliens, ils sont évidemment inclus dans $[\![\Gamma]\!]'$ et l'argument s'applique donc aussi à ce dernier. □

Fait 2.2.7. — *On suppose qu'on a une partition de* X *(en parties appelées composantes). Si la partition est invariante par* $[\![\Gamma]\!]$*, alors toute* Γ*-orbite est soit composée d'atomes (composantes réduites à un point), soit incluse dans une seule composante. Sous l'hypothèse plus faible que la partition est invariante par* $[\![\Gamma]\!]'$*, la même assertion est vraie pour toute orbite de cardinal distinct de 2.*

Démonstration. — On se donne une Γ-orbite non réduite à un singleton (l'énoncé étant trivial pour un point fixe). Si par l'absurde elle ne vérifie pas la conclusion, elle contient deux points x, y dans deux composantes distinctes, telle que la composante de x contient un autre point w de X. Le fait 2.2.4 fournit dans $[\![\Gamma]\!]$ un élément fixant w et échangeant y et z ; cet élément ne préserve pas la partition, contradiction.

Dans le cas d'une partition $[\![\Gamma]\!]'$-invariante, le même raisonnement (pour une orbite à au moins 3 éléments) aboutit à l'existence de points w, x, y vérifiant les mêmes hypothèses, et d'un point supplémentaire z dans l'orbite de x. Si $x \neq z$, le fait 2.2.4 fournit dans $[\![\Gamma]\!]'$ un élément fixant w et permutant cycliquement x, y, z ; si $x = z$, il fournit dans

$[\![\Gamma]\!]'$ un élément permutant cycliquement w, x, y ; dans les deux cas, l'élément d'ordre 3 obtenu ne préserve pas la partition. $\square$

3. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES GROUPES PLEINS-TOPOLOGIQUES SUR Z

3.1. Simplicité du groupe dérivé

On montre ici que si φ est un autohoméomorphisme minimal d'un compact totalement séparé X, alors le groupe dérivé $[\![\varphi]\!]'$ est simple. Ce résultat est dû à Matui [Ma06]. Une preuve plus directe en a été donnée par Bezuglyi et Medynets [BeM08], que l'on va suivre. (On dira cependant plus loin quelques mots sur l'approche de Matui.)

La méthode de Bezuglyi-Medynets consiste à montrer directement que pour tout $f \in [\![\varphi]\!]$ non trivial, le commutateur de deux éléments à petit support (en un sens lié aux probabilités φ-invariantes sur X) appartient au sous-groupe distingué engendré par f. Le résultat de simplicité en découle, une fois qu'on sait exprimer tout élément comme produit d'éléments à petit support. Ceci utilise la notion de fonction de premier retour, définie ci-dessous.

Soit X un espace topologique et soit ψ un autohoméomorphisme. On dit que $A \subset X$ est *ψ-omniscient* si $\bigcup_{n\in\mathbf{Z}} \psi^n(A) = X$, ou autrement dit, si l'ensemble

$$Z(x) = Z(A, \psi, x) = \{n \in \mathbf{Z} : \psi^n(x) \in A\}$$

est non vide pour tout $x \in X$.

FAIT 3.1.1. — *On suppose X compact. Si $A \subset X$ est un ouvert ψ-omniscient, alors pour tout $x \in X$, l'ensemble $Z(x)$ n'est ni minoré ni majoré.*

Démonstration. — Par hypothèse, $Z(x)$ est non vide pour tout x. Soit M_k l'ensemble des x pour qui $\sup(Z(x)) \leq k$. C'est un fermé ; si on suppose par l'absurde qu'il est non vide pour au moins un k, il est en fait non vide pour tout k puisque $\psi(M_k) = M_{k-1}$. En outre, $M_k \subset M_{k+1}$ pour tout k, donc par compacité on obtient $\bigcap_k M_k \neq \emptyset$, ce qui est une contradiction. Ceci prouve que $Z(x)$ n'est jamais majoré ; pour la même raison il n'est jamais minoré. $\square$

Ceci permet de définir, si A est ψ-omniscient, la fonction

$$\psi_A(x) = \psi^{k(x)}(x), \quad \text{où} \quad k(x) = k_{A,\psi}(x) = \begin{cases} \inf(Z(x) \cap]0, +\infty[) & \text{si } x \in A\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction ψ_A est appelée *fonction de premier retour de ψ sur A* ; c'est un autohoméomorphisme, de réciproque $(\psi^{-1})_A$. Si A est clouvert, il est immédiat que la fonction k est continue (c'est-à-dire localement constante), si bien que $\psi_A \in [\![\psi]\!]$ et donc $\psi_A \in [\![\varphi]\!]$ si $\psi \in [\![\varphi]\!]$ pour un autohoméomorphisme φ préalablement fixé.

FAIT 3.1.2. — *Si X est compact, ψ est un autohoméomorphisme, et A est un clouvert ψ-omniscient, alors $\psi^{-1}\psi_A$ est périodique.*

Démonstration. — Posons $v(x) = \inf(Z(x) \cap]0, +\infty[)$ et $u(x) = \sup(Z(x) \cap]-\infty, 0])$. Remarquons que

$$1 \leq v - u \leq \sup k \quad \text{et} \quad (\psi^{-1}\psi_A)^{v(x)-u(x)} x = x$$

pour tout x. Donc $(\psi^{-1}\psi_A)^n = 1$, où $n = (\sup k)!$. □

LEMME 3.1.3. — *Soit f un autohoméomorphisme d'un espace compact totalement séparé X, et $n \geq 1$ un entier. On suppose que f^i est sans point fixe pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Alors il existe un clouvert U tel que les $(f^i(U))$, pour $0 \leq i \leq n-1$, sont deux à deux disjoints et $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} f^i(U) = X$.*

En particulier, si $f^n = 1$ et si f définit une action libre de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, alors les $(f^i(U))$, pour $0 \leq i \leq n-1$, forment une partition de X.

Démonstration. — Pour tout $x \in X$ on choisit un voisinage clouvert V_x disjoint de $\bigcup_{1 \leq i \leq n-1} f^i(V_x)$. On extrait du recouvrement (V_x) un recouvrement fini $(W_k)_{1 \leq k \leq m}$. On pose, pour $1 \leq k \leq m$,

$$X_k = W_k \smallsetminus \bigcup_{0<j<k,\ -n<i<n} f^i(W_j).$$

Alors $U = \bigcup_{1 \leq k \leq m} X_k$ satisfait la condition demandée. □

Rappelons que par moyennabilité de $\mathbf{Z}$ (se reflétant ici par le théorème de Kakutani), tout autohoméomorphisme φ d'un compact non vide X préserve une probabilité sur les boréliens. Notons $\mathcal{M}_\varphi(X)$ l'ensemble des probabilités boréliennes φ-invariantes sur X ; c'est un compact pour la topologie faible-* (convergence étroite). Si B est un borélien de X, notons

$$L_\varphi^+(U) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)} \mu(B); \quad L_\varphi^-(U) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)} \mu(B).$$

LEMME 3.1.4. — *Soit φ un autohoméomorphisme sans orbite finie du compact totalement séparé X. Alors pour tout $\psi \in [\![\varphi]\!]$ et $\varepsilon > 0$, il existe m et $\psi_1, \ldots, \psi_m$ dans $[\![\varphi]\!]$ tels que $\psi = \psi_1 \ldots \psi_m$ et $L_\varphi^+(\mathrm{Supp}(g_i)) < \varepsilon$ pour tout i. Si de plus $\psi^n = 1$ pour un entier $n \geq 1$, on peut s'arranger pour que $\psi_i^n = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, m$.*

Démonstration. — Soit $o_\psi(x)$ le cardinal de la $\langle\psi\rangle$-orbite de x, et posons $X_n = X_n(\psi) = \{x \mid o_\psi(x) = n\}$ et $X_{\leq n} = \bigcup_{k \leq n} X_k$.

Remarquons que comme φ n'a pas d'orbite finie, tout élément $x \in X$ possède des voisinages clouverts avec L_φ^+ arbitrairement petit. Si $\psi^n = 1$ pour un entier $n \geq 1$, il en découle que tout élément x possède des voisinages ψ-invariants avec L_φ^+ arbitrairement petit. On en déduit, si ψ est périodique, l'existence d'une partition (U_j) en clouverts ψ-invariants avec $L_\varphi^+(U_j) < \varepsilon$ pour tout j, qui induit une décomposition $\psi = \prod \psi_j$, où ψ_j a un support inclus dans U_j. Le lemme est donc démontré pour ψ périodique, et de plus $\psi_j^n = 1$ pour tout j.

Faisons maintenant le cas opposé où ψ n'a aucune orbite finie. On choisit un entier $n > 1/\varepsilon$. Le lemme 3.1.3 montre qu'il existe un clouvert U ψ-omniscient tel que $U \cap \psi^i(U) = \emptyset$ pour tout $0 \leq i \leq n-1$. Donc, comme toute probabilité borélienne φ-invariante est aussi ψ-invariante, on a $L^+_\varphi(U) \leq 1/n < \varepsilon$. On écrit $\psi = \psi_U \tau$, où $\tau = \psi_U^{-1}\psi$ est périodique par le fait 3.1.2. Alors $L^+_\varphi(\mathrm{Supp}(\psi_U)) < \varepsilon$, et on peut décomposer τ par le cas périodique.

Pour ψ quelconque, si N est assez grand, alors $\psi\varphi^N$ et φ^{-N} n'ont pas d'orbite finie et $\psi = (\psi\varphi^N)\varphi^{-N}$, si bien qu'on peut décomposer chacun des deux par le cas précédent. □

On utilise le lemme suivant, dû à Glasner et Weiss [GlW95]. Sa preuve se distingue ici par l'invocation d'arguments à caractère ergodique.

LEMME 3.1.5. — *Soit φ un autohoméomorphisme minimal d'un compact totalement séparé X. Soient A, B des clouverts tels que $\mu(B) < \mu(A)$ pour toute probabilité borélienne φ-invariante sur X. Alors il existe $\alpha \in [\![\varphi]\!]'$ tel que $\alpha(B) \subset A$.*

Démonstration. — Le cas où X est fini étant trivial, on suppose X infini, si bien que l'action de $\mathbf{Z}$ est libre. On pose $f = 1_A - 1_B$; on a donc $\int f d\mu > 0$ pour tout $\mu \in \mathcal{M}_\varphi(X)$. On commence par observer qu'il existe $c > 0$ et $N_0 \geq 5$ tels que pour tout $N \geq N_0$ et tout $x \in X$, on a

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(\varphi^i(x)) \geq c. \tag{3.1}$$

Sinon, on trouve une suite (N_k) tendant vers l'infini, une suite (c_k) avec $\overline{\lim}\, c_k \leq 0$ et une suite (x_k) telle que $\frac{1}{N_k}\sum_{i=0}^{N_k-1} f(\varphi^i(x_k)) \leq c_k$. Autrement dit, en posant $\mu_k = \frac{1}{N_k}\sum_{i=0}^{N_k-1} \varphi^i_*\delta_{x_k}$, on a $\int f d\mu_k \leq c_k$. Par compacité, la suite (μ_k) admet un point d'accumulation μ pour la topologie faible-*, et donc $\int f d\mu \leq 0$. Or μ doit être φ-invariante et c'est une contradiction.

Considérons maintenant un clouvert non vide U inclus dans A, tel que les $\varphi^i(U)$ pour $0 \leq i < N_0$ soient deux à deux disjoints. Comme φ est minimal, U est φ-omniscient. Soient $k = k_{A,\varphi}$ la fonction temps de retour sur U et κ une borne supérieure pour k. On peut trouver une partition en clouverts (U'_ℓ) de U telle que k soit constante sur chacune des composantes de la partition. Remarquons que les $\varphi^i(U'_\ell)$, pour $0 \leq i \leq k(U'_\ell) - 1$, sont deux à deux disjoints, et qu'en faisant varier également i ils forment une partition de U (communément appelée partition en « tours de Kakutani-Rokhlin »). On raffine la partition (U'_ℓ) en une partition de U en clouverts (U_j) et telle que chaque $\varphi^i(U_j)$, pour $0 \leq i \leq k(U_j) - 1$, soit inclus dans l'un des ensembles $A \smallsetminus B$, $B \smallsetminus A$, $A \cap B$, ou bien $X \smallsetminus (A \cup B)$. Comme pour la partition précédente on a une partition

$$X = \bigsqcup_j \bigsqcup_{0 \leq i \leq k(U_j)-1} \varphi^i(U_j).$$

Pour chaque j, appelons « tour » une réunion $\bigsqcup_{0\le i\le k(U_j)-1}\varphi^i(U_j)$. Pour chaque j, soit A_j (resp. B_j, C_j, D_j) l'ensemble des $i\in\{0,\dots,k(U_j)-1\}$ tel que $\varphi^i(U_j)$ appartient à $A\setminus B$ (resp. $B\setminus A$, $A\cap B$, $X\setminus(A\cup B)$). Alors pour tout j on a $\#(A_j)\ge\#(B_j)$. En effet, par (3.1), pour $x\in U_j$, on a

$$\frac{\#(A_j)-\#(B_j)}{k(U_j)}=\frac{1}{k(U_j)}\sum_{i=0}^{k(U_j)-1}f(\varphi^i(x))\ge c>0.$$

Pour tout j, on peut trouver une permutation σ_j de $\{0,\dots,k(U_j)-1\}$ qui envoie B_j dans A_j, et préserve C_j et D_j. Cela définit naturellement un élément $\alpha\in[\![\varphi]\!]$, préservant globalement chaque tour, qui envoie B dans A. Remarquons qu'on peut s'arranger pour que chaque σ_j soit une permutation paire : en effet comme $k(U_j)\ge 5$ pour tout j, au moins l'un des ensembles $A_j,\dots,D_j$ a deux éléments et on peut donc composer par une transposition si nécessaire. Ce choix étant fait, l'élément α obtenu est un commutateur. □

THÉORÈME 3.1.6. — *Soit φ un autohoméomorphisme minimal d'un compact totalement séparé X à au moins 5 points. Alors le groupe dérivé $[\![\varphi]\!]'$ est simple et est contenu dans tout sous-groupe distingué non trivial de $[\![\varphi]\!]$.*

Démonstration. — Si X est fini, ce n'est rien d'autre que la simplicité du groupe alterné, qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer ici. On suppose maintenant X infini.

Considérons un sous-groupe non trivial N de $[\![\varphi]\!]$ normalisé par $[\![\varphi]\!]'$. Le commutant de $[\![\varphi]\!]'$ dans Homeo(X) est trivial (corolaire 2.2.5), si bien qu'on peut choisir un élément non trivial f dans $N\cap[\![\varphi]\!]'$.

Pour démontrer le résultat, il faut montrer que pour tous $g,h\in[\![\varphi]\!]$ on a $[g,h]\in N$. Supposons, dans un premier temps [2], que N est distingué dans $[\![\varphi]\!]$.

Soit E un clouvert non vide disjoint de $f(E)$. L'application qui à $\mu\in\mathcal{M}_\varphi(X)$ associe $\mu(E)$ est continue ; par compacité de $\mathcal{M}_\varphi(X)$, il en découle que $\varepsilon=L^-_\varphi(E)>0$.

Par le lemme 3.1.4, on peut écrire $g=\prod g_i$ et $h=\prod h_j$ avec $L^+_\varphi(\mathrm{Supp}(g_i))$ et $L^+_\varphi(\mathrm{Supp}(h_j))$ strictement inférieurs à $\varepsilon/2$. L'élément $[g,h]$ appartient au sous-groupe distingué engendré par les $[g_i,h_j]$ (comme on voit en quotientant par ce dernier). Donc il suffit de montrer que les $[g_i,h_j]$ sont dans N.

Soit U le clouvert $\mathrm{Supp}(g_i)\cup\mathrm{Supp}(h_j)$; on a $L^+_\varphi(U)<\varepsilon=L^-_\varphi(E)$. Par le lemme 3.1.5, il existe un élément $\alpha\in[\![\varphi]\!]'$ tel que $\alpha(U)\subset E$; soit $q=\alpha^{-1}f\alpha\in N$. L'élément $\hat h_j=[h_j,q]=h_jqh_j^{-1}q^{-1}$ appartient à N, et donc $[g_i,\hat h_j]\in N$. Puisque $q(U)\cap U=\emptyset$, les éléments g_i^{-1} et qh_jq^{-1} commutent, donc

$$[g_i,\hat h_j]=g_ih_j(qh_j^{-1}q^{-1})g_i^{-1}(qh_jq^{-1})h_j^{-1}=g_ih_jg_i^{-1}h_j^{-1}=[g_i,h_j],$$

si bien que $[g_i,h_j]\in N$.

2. Pierre Py m'a signalé une erreur dans la preuve dans une version précédente de ce texte, reprenant une erreur dans [BeM08]. L'argument donné ne fonctionnait en effet qu'en supposant N distingué dans $[\![\varphi]\!]$, ce qui ne suffisait pas à établir la simplicité de $[\![\varphi]\!]'$.

On a donc démontré que tout sous-groupe distingué de $[\![\varphi]\!]$ non réduit à l'identité contient $[\![\varphi]\!]'$. On peut appliquer ce résultat au sous-groupe de $[\![\varphi]\!]$ engendré par les éléments d'ordre 5. En effet, étant donné un tel élement, l'ensemble de ses points fixes est clouvert, et on peut appliquer le fait 3.1.3 au complémentaire de l'ensemble de ses points fixes, ce qui permet de vérifier que cet élément est contenu dans un sous-groupe de $[\![\varphi]\!]$ isomorphe au groupe alterné $\mathfrak{A}_5$; en particulier, tout élément d'ordre 5 est un commutateur, et d'autre part le fait 2.2.4 montre qu'il existe des éléments d'ordre 5 ; ceci démontre que le groupe $[\![\varphi]\!]'$ est égal au sous-groupe de $[\![\varphi]\!]$ engendré par les élements d'ordre 5 (le lecteur peut vérifier qu'il en est de même pour tout ordre entier impair supérieur à 2). Ceci démontre en outre que $[\![\varphi]\!]'$ est engendré par ses sous-groupes isomorphes à $\mathfrak{A}_5$, et donc coïncide avec son sous-groupe dérivé (ce qu'on voit également en remarquant que $[\![\varphi]\!]''$ est non trivial et distingué dans $[\![\varphi]\!]$ et contient donc le groupe dérivé).

Pour montrer le théorème, puisque $[\![\varphi]\!]'' = [\![\varphi]\!]'$, il suffit de montrer que pour tous $g, h \in [\![\varphi]\!]'$ on a $[g, h] \in N$. On peut donc, avec la version « périodique d'ordre 5 » du lemme 3.1.4, faire le raisonnement précédent en supposant que $g_i, h_j \in [\![\varphi]\!]'$, auquel cas il suffit de supposer N distingué dans $[\![\varphi]\!]'$ pour obtenir que $[g_i, h_j]$ appartient à N. □

L'approche de Matui, très différente, est plus complexe mais apporte d'autres informations. Elle suppose toujours de manière essentielle que $\Gamma = [\![\varphi]\!]$ et X est compact totalement séparé, minimal. Elle est basée sur une étude du sous-groupe

$$[\![\varphi]\!]_{[x\rangle} = \{f \in [\![\varphi]\!] : f(\varphi^{\mathbf{N}}(x)) = \varphi^{\mathbf{N}}(x)\}, \quad \text{où} \quad \varphi^{\mathbf{N}}(x) = \{\varphi^n(x) : n \in \mathbf{N}\};$$

montrant notamment que si x, y appartiennent à des orbites distinctes alors $[\![\varphi]\!]' \subset [\![\varphi]\!]_{[x\rangle}[\![\varphi]\!]_{[y\rangle}$. On utilisera ce sous-groupe à plusieurs reprises par la suite (§3.3 et §4.1), mais de manière moins approfondie que dans [Ma06].

3.2. Type-finitude

On commence par l'observation suivante qui justifie que sous des hypothèses très générales, être un sous-décalage est une condition nécessaire pour que le groupe plein-topologique et son dérivé soient de type fini.

Proposition 3.2.1. — *Soit Γ un groupe agissant par autohoméomorphismes sur un espace compact totalement séparé X, sans point fixe global. Si $\Lambda = [\![\Gamma]\!]$ est de type fini et X n'a qu'un nombre fini de Γ-orbites de cardinal au plus deux, alors (Γ, X) est un sous-décalage. Si de plus aucune Γ-orbite n'est de cardinal deux, il en est de même si Λ est un sous-groupe de $[\![\Gamma]\!]$ contenant $[\![\Gamma]\!]'$.*

Démonstration. — Pour tout x il existe γ_x dans Γ et un voisinage clouvert V_x de x disjoint de $\gamma_x V_x$. On peut raffiner et extraire une partition (U_j) en clouverts telle que chaque U_j ne contient aucune orbite.

Supposons que $[\![\Gamma]\!]$ est de type fini. Considérons un nombre fini de clouverts sur qui chaque générateur est donné par action d'un élément donné de Γ. Considérons l'algèbre booléenne Γ-invariante engendrée par ces clouverts et par les U_j. Elle définit une partition Γ-invariante de X. Comme les U_j ne contiennent aucune orbite, aucune composante de cette partition ne contient d'orbite. Donc, par le fait 2.2.7, toute Γ-orbite est composée d'atomes de cette partition, donc c'est la partition triviale, ce qui montre, par le fait 2.1.2, que (Γ, X) est un sous-décalage.

Pour Λ contenant $[\![\Gamma]\!]'$, grâce au fait 2.2.7, l'hypothèse supplémentaire permet d'appliquer le même raisonnement. □

On va maintenant se restreindre au cas de $\Gamma = \mathbf{Z}$. Matui prouve le théorème suivant [Ma06, Theorem 5.4].

Théorème 3.2.2. — *Soit (X, φ) un sous-décalage minimal sur $\mathbf{Z}$. Alors le groupe dérivé $[\![\varphi]\!]'$ du groupe plein-topologique correspondant est de type fini.*

On commence par deux lemmes. Rappelons qu'un sous-décalage $X \subset A^{\mathbf{Z}}$ est dit *k-propre* si pour tout $w \in X$ et tous m, n tels que $0 < |m - n| \leq k$ on a $w(m) \neq w(n)$.

Lemme 3.2.3. — *Soit $d \geq 1$. Tout sous-décalage (X, φ) sur $\mathbf{Z}$ sans orbite de cardinal au plus d est isomorphe à un sous-décalage d-propre (sur un autre alphabet).*

Démonstration. — Par hypothèse (cf. le fait 2.1.2), X est compact totalement séparé et il existe une partition de X en clouverts, indexée par un ensemble fini A, dont les Γ-translatés séparent les points. Notons φ l'autohoméomorphisme de décalage. Par hypothèse, pour tout $x \in X$, les éléments $x, \varphi(x), \ldots, \varphi^d(x)$ sont deux à deux distincts. Donc on peut raffiner la partition en une partition en clouverts $(V_b)_{b \in B}$, indexée par un ensemble fini B plus grand, tel que pour tout b, les $\varphi^i(V_b)$, pour $i = 0, \ldots, d$, sont deux à deux disjoints. La réalisation correspondante comme sous-décalage sur B^Γ est donc, par définition, d-propre. □

Définition 3.2.4. — *Si I est une partie finie de $\mathbf{Z}$, on dit qu'un clouvert U est I-*bon *si les $(\varphi^i(U))_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints. On abrège « $\{-1, 0, 1\}$-bon » en « bon ». étant donné un clouvert $U \subset X$ bon, on définit $\sigma_U \in [\![\varphi]\!]$ comme l'élément d'ordre au plus 3 qui vaut l'identité hors de $\varphi^{-1}U \cup U \cup \varphi U$ et permute cycliquement :*

$$U \xrightarrow{\varphi} \varphi(U) \xrightarrow{\varphi^{-2}} \varphi^{-1}(U) \xrightarrow{\varphi} U.$$

Lemme 3.2.5. — *Soit (X, φ) un sous-décalage minimal infini sur $\mathbf{Z}$. Le groupe $[\![\varphi]\!]'$ est engendré par les σ_U, où U parcourt les clouverts bons.*

Démonstration. — Commençons par observer que $[\![\varphi]\!]'$ est engendré par ses éléments d'ordre 3 : en effet il existe dans $[\![\varphi]\!]'$ des éléments d'ordre 3, et comme $[\![\varphi]\!]'$ est simple (théorème 3.1.6), ils forment donc une partie génératrice. Disons qu'un élément σ d'ordre 3 est *spécial* s'il existe une partie à 3 éléments $I = \{i, j, k\}$ et un clouvert U I-bon tel que σ est l'identité hors de $\bigcup_{i \in I} \varphi^i(U)$ et échange $\varphi^i(U)$, $\varphi^j(U)$ et $\varphi^k(U)$ par action de φ^{j-i}, φ^{j-k}, et φ^{k-i}. Si σ est un élément d'ordre 3 quelconque et κ est la fonction étagée associée, alors en regardant les fibres de la fonction $x \mapsto (\kappa(x), \kappa(\varphi(x)), \kappa(\varphi^2(x)))$, on voit que σ est un produit d'éléments d'ordre 3 spéciaux à supports disjoints. Soit maintenant σ d'ordre 3 spécial, et U et I les parties correspondantes. Soit J un segment entier contenant I. Alors il existe une partition (U_k) de U en clouverts J-bons ; on peut écrire σ comme produit de ses restrictions aux $\bigcup_{i\in I}\varphi^i(U_k)$; ainsi on est ramené au cas où σ a la propriété supplémentaire que I est J-bon. On observe alors que pour tout intervalle entier J, le groupe alterné est engendré par les 3-cycles $(i-1; i; i+1)$ compris dans J (voir par exemple [Ma06, Lemma 5.1] pour une preuve). Or ce 3-cycle correspond à l'élément $\sigma_{\varphi^i(U)}$; ainsi σ est produit de tels éléments et de leurs inverses, ce qui termine la preuve. □

Preuve du théorème 3.2.2. — On suppose X infini, puisque sinon le résultat est trivial. Par le lemme 3.2.3, on peut supposer que $X \subset A^{\mathbf{Z}}$ est un sous-décalage 4-propre.

On commence par l'observation suivante : si $U, V \subset X$ sont des clouverts et si les ensembles $\varphi^{-1}U$, U, φU, $\varphi^{-1}V$, V et φV sont deux à deux disjoints *sauf* peut-être φU et $\varphi^{-1}V$, alors, en notant $[s,t] = sts^{-1}t^{-1}$, on a l'égalité

$$[\sigma_V, \sigma_U^{-1}] = \sigma_{\varphi U\cap\varphi^{-1}V}. \tag{3.2}$$

Si I est une partie finie non vide de $\mathbf{Z}$ et $f \in A^I$, on définit le *cylindre*

$$\mathrm{Cyl}(I,f) = \{w \in X \mid w|_I = f\}.$$

Remarquons que les cylindres sont des clouverts, et sont bons (définition 3.2.4) car X est 1-propre (et I non vide) ; en outre, ils forment, en faisant varier I et f, une base de la topologie de X.

On définit Λ comme le sous-groupe de $[\![\Gamma]\!]$ engendré par l'ensemble fini constitué des éléments de la forme $\sigma_{\mathrm{Cyl}(\{-1,0,1\},f)}$ où $f \in A^{\{-1,0,1\}}$. On va prouver le théorème en montrant que $\Lambda = [\![\varphi]\!]'$. Par le lemme 3.2.5, il suffit de vérifier que les σ_U, pour U clouvert bon, sont dans Λ. En décomposant U, on voit qu'il suffit de le vérifier dans le cas où U est un cylindre $\mathrm{Cyl}(I_n, h)$, où $I_n = \{-n,\dots,n\}$.

Vérifions donc par récurrence sur $n \geq 1$ que pour tout $h \in A^{I_n}$ on a $\sigma_{\mathrm{Cyl}(I_n,h)} \in \Lambda$. C'est vrai par hypothèse pour $n = 1$ et supposons que $n \geq 2$ est que c'est démontré en deçà. On note $\tau(n) = n+1$ la translation sur $\mathbf{Z}$, si bien que τ agit sur les fonctions partiellement définies sur $\mathbf{Z}$: si on a $f \in A^I$, alors $\tau\cdot f \in A^{\tau I}$ est définie par $\tau\cdot f(n) = f(n-1)$ (on écrit $\tau I = \tau(I)$ pour alléger les notations). La fonction $\tau^{\pm1}\cdot h$ est définie sur $\tau^{\pm1}I_n$. Soit $h_\pm$ sa restriction à I_{n-1}. Notons $Y_\pm = \mathrm{Cyl}(I_{n-1}, h_\pm)$. Alors on a

$$\tau Y_- \cup \tau^{-1}Y_+ \subset \mathrm{Cyl}(\{0\}, h(0)).$$

Donc, par 4-propreté, on a

$$Y_+ \cap \tau^i Y_+ = Y_- \cap \tau^i Y_- = \emptyset \quad \text{et} \quad \tau^{j+1}Y_- \cap \tau^{k-1}Y_+ = \emptyset$$

pour tous $i, j, k \in \mathbf{Z}$ tels que $1 \leq |i| \leq 4$ et $1 \leq |j-k| \leq 4$. Les hypothèses de (3.2) sont donc remplies, et on déduit que

$$\sigma_{\mathrm{Cyl}(I_n,h)} = \left[\sigma_{\mathrm{Cyl}(I_{n-1},h_-)}\,,\, \sigma^{-1}_{\mathrm{Cyl}(I_{n-1},h_+)}\right]$$

et par conséquent $\sigma_{\mathrm{Cyl}(I_n,h)} \in \Lambda$. □

Remarque 3.1. — Dans le meilleur des cas, A a 6 éléments (à cause de la 4-propreté), cela fait une partie génératrice à $120 = 6 \times 5 \times 4$ éléments (ou $241 = 2 \times 120 + 1$ si on veut une partie symétrique avec 1), soit autant que d'injections de $\{-1, 0, 1\}$ dans A ; c'est loin d'être optimal ; dans un cas particulier Matui [Ma06, §6] donne une partie génératrice à 4 éléments (voir aussi [Ma12, §3.1]).

3.3. Structure de l'abélianisé

Les résultats de cette sous-partie sont principalement dus à Giordano-Putnam-Skau et Matui [GPS99, Ma06] (3).

Soit X un compact totalement séparé non vide et φ un autohoméomorphisme. Soit x un point dont la φ-orbite est infinie. On note $\mathbf{N} = \{0, 1, 2 \ldots\}$ et $\mathbf{N}^c$ son complémentaire dans $\mathbf{Z}$. On définit

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{mod}_x : [\![\varphi]\!] & \to & \mathbf{Z} \\ \psi & \mapsto & \#\left(\varphi^{\mathbf{N}^c}(x) \cap \psi^{-1}(\varphi^{\mathbf{N}}(x))\right) - \#\left(\varphi^{\mathbf{N}}(x) \cap \psi^{-1}(\varphi^{\mathbf{N}^c}(x))\right) \end{array}$$

Intuitivement, c'est le « transfert global » d'éléments de gauche à droite dans l'orbite de x.

Proposition 3.3.1. — *L'application* mod_x *est un morphisme de groupes et ne dépend pas du choix de x dans son orbite ; on a* $\mathrm{mod}_x(\varphi) = 1$ *(si bien que* mod_x *est surjectif). De plus, si* $\mathrm{Hom}([\![\varphi]\!], \mathbf{Z})$ *est muni de la topologie de la convergence ponctuelle, l'application* $x \mapsto \mathrm{mod}_x$*, définie sur la réunion des orbites infinies, est continue.*

Démonstration. — Que mod_x est un morphisme est un fait général sur le groupe des permutations à déplacement borné de $\mathbf{Z}$ et est laissé en exercice au lecteur. Le fait que $\mathrm{mod}_x = \mathrm{mod}_{\varphi(x)}$ en découle, car $\mathrm{mod}_{\varphi(x)}(\psi) = \mathrm{mod}_x(\varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi)$ pour tout $\psi \in [\![\varphi]\!]$.

Vérifions la deuxième assertion. Il faut montrer que si (x_n) converge vers x et ψ est fixé alors $\mathrm{mod}_{x_n}(\psi)$ est égal, pour n assez grand, à $\mathrm{mod}_x(\psi)$. Soit m une borne supérieure sur la fonction étagée associée à ψ. Soit (U_i) une partition en clouverts trivialisant ψ. Il existe n_0 tel que pour tout $|i| \leq m$, l'élément $\varphi^i(x_n)$ est dans la même composante de la partition (U_i) que x. On en déduit facilement que $\mathrm{mod}_{x_n}(\psi) = \mathrm{mod}_x(\psi)$ pour tout $n \geq n_0$. □

En particulier, s'il existe une φ-orbite dense (par exemple, X est minimal), alors mod_x ne dépend pas de x, on le note alors mod.

Théorème 3.3.2. — *Si X est un compact totalement séparé et φ agit minimalement, alors le noyau* $[\![\varphi]\!]^0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{mod})$ *est engendré par ses éléments d'ordre fini.*

3. *(Ajout février 2020)* Voir aussi l'appendice B

Cela implique en particulier que mod est l'unique morphisme de $[\![\varphi]\!]$ vers $\mathbf{Z}$ envoyant φ sur 1. Or, il existe d'autres manières de construire ce morphisme. Par exemple, si μ est une probabilité borélienne invariante, on vérifie directement que l'application $\iota_\mu : \psi \mapsto \int k_\psi d\mu$, où k_ψ est la fonction étagée associée à ψ, est un morphisme vers $\mathbf{R}$ envoyant φ sur 1, et il en découle facilement que $\iota_\mu = \mathrm{mod}$ (et en particulier que ι_μ prend des valeurs entières et ne dépend pas de μ).

Pour prouver le théorème 3.3.2, on a besoin du lemme classique suivant, qui servira aussi dans la preuve de la moyennabilité ; il semble remonter à Putnam [Pu89, Sec. 5] ; même si tous les ingrédients de la preuve y sont contenus, le résultat n'y est pas explicité ; cependant les papiers ultérieurs s'y réfèrent. Une preuve directe est donnée par Juschenko et Monod dans [JM12] (voir aussi Matui [Ma06, Proposition 3.2], dans un langage un peu différent mais à portée plus générale).

Lemme 3.3.3 (Putnam). — *Si X est compact totalement séparé et φ est un autohoméomorphisme minimal, alors pour tout $x \in X$ le stabilisateur $[\![\varphi]\!]_{[x\rangle}$ de l'orbite positive $\varphi^{\mathbf{N}}(x)$ est localement fini.*

Démonstration. — Soit i_x la fonction orbitale $n \mapsto \varphi^n(x)$; soit j_x l'action de $[\![\varphi]\!]$ sur $\mathbf{Z}$ obtenue à partir de celle sur l'orbite de x via la bijection $i_x : \mathbf{Z} \to \varphi^{\mathbf{Z}}(x)$; autrement dit, pour $\psi \in [\![\varphi]\!]$, on définit $j_x(\psi)$ comme la permutation $i_x^{-1} \circ \psi \circ i_x$ de $\mathbf{Z}$.

L'assertion du lemme revient à affirmer que toute partie finie F (qu'on peut supposer symétrique) de $[\![\varphi]\!]_{[x\rangle}$ engendre un groupe agissant sur $\mathbf{Z}$ (via j_x) avec orbites finies. Posons $\tau_x(\psi)(n) = j_x(\psi)(n) - n$, si bien que $\tau_x(\psi) : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ est une fonction bornée. Fixons F. Soient

$$m = \sup_{\theta \in F,\, n \in \mathbf{Z}} |\tau_x(\theta)(n)|, \quad A = \{-m, \dots, m\}^F.$$

On a une application anti-équivariante naturelle α continue de X dans le décalage $(A^{\mathbf{Z}}, T)$ (avec $T(w)(n) = w(n-1)$), qui envoie $y \in X$ sur la suite $n \mapsto (\theta \mapsto \tau_y(\theta)(n))$. Son image est un sous-décalage minimal. Ceci implique facilement (voir par exemple [MH38, Theorem 7.2]) que si on définit I comme l'ensemble des $n \in \mathbf{Z}$ tels que $T^{-n}\alpha(x)$ et $\alpha(x)$ coïncident sur $\{0, \dots, m-1\}$, alors I est coborné, au sens où la fonction $d(\cdot, I)$ est bornée sur $\mathbf{Z}$. On peut indexer I de façon strictement croissante : $I = \{p_n, n \in \mathbf{Z}\}$, si bien que la suite $(p_{n+1} - p_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est bornée. On définit l'intervalle entier $P_n = \{p_n, p_n + 1, \dots, p_{n+1} - 1\}$, de telle manière que $\mathbf{Z}$ est la réunion disjointe des P_n. Si $0 \le k \le m-1$ et $\theta \in F$, alors

$$\begin{aligned} j_x(\theta)(p_n + k) - p_n =& \tau_x(\theta)(p_n + k) + k \\ =& T^{-p_n}\tau_x(\theta)(k) + k = T^{-p_n}\alpha(x)(k)(\theta) + k \\ =& \alpha(x)(k)(\theta) + k = \tau_x(\theta)(k) + k = j_x(\theta)(k) \ge 0 \end{aligned}$$

car $\theta \in [\![\varphi]\!]_{[x\rangle}$. Comme les éléments de F translatent les points d'au plus m, cela démontre que $j_x(\theta)(P_n) \subset \bigcup_{n' \ge n} P_{n'}$ pour tout $\theta \in F$, et comme F est supposé symétrique, le même argument montre que $j_x(\theta)(P_n) \subset \bigcup_{n' \leq n} P_{n'}$, et par conséquent chaque P_n est stable par $j_x(F)$. Comme ils sont de cardinal borné, la preuve est terminée. $\square$

Preuve du théorème 3.3.2. — Soit $\psi \in [\![\varphi]\!]^0$. Soit m une borne supérieure sur la fonction étagée associée. Soient $I = \varphi^{N^c}(x) \cap \psi^{-1}(\varphi^{\mathbf{N}}(x))$ et $J = \varphi^{N}(x) \cap \psi^{-1}(\varphi^{\mathbf{N}^c}(x))$. Par hypothèse, I et J ont même cardinal et sont inclus dans $\varphi^{\{-m,\ldots,m\}}(x)$. Le fait 2.2.4 montre qu'il existe une involution $s \in [\![\varphi]\!]$ qui échange les éléments de I et les éléments de J, et dont la fonction étagée associée est bornée par $2m$. Dans la preuve du fait, en choisissant leurs supports assez petits, on peut supposer qu'ils évitent l'ensemble fini $\varphi^{\{-2m,\ldots,2m\}}(x)$. Par conséquent, l'élément $s\psi$ stabilise $\varphi^{\mathbf{N}}(x)$. Par le lemme 3.3.3, $s\psi$ est d'ordre fini. $\square$

On va maintenant donner une version plus précise du théorème 3.3.2, due à Matui.

Proposition 3.3.4. — *Le groupe $[\![\varphi]\!]^0$ est engendré par ses éléments d'ordre 2.*

Démonstration. — Dans la preuve du théorème 3.3.2, on a montré, après avoir fixé $x \in X$ que tout élément de $[\![\varphi]\!]^0$ est produit d'une involution et d'un élément de $[\![\varphi]\!]_{[x\rangle}$, qui est localement fini par le lemme 3.3.3. Il suffit donc de montrer que tout élément d'ordre fini est produit d'éléments d'ordre 2. L'argument du lemme 3.1.4 montre que tout élément d'ordre fini est produit (à supports disjoints) d'éléments ψ_i d'ordre fini n_i définissant une action libre d'un groupe cyclique $\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z}$ sur le support de ψ_i. Par le lemme 3.1.3, il existe un clouvert U tel que le support de ψ_i est union disjointe des $(\varphi(U))_{0 \leq i \leq n_i - 1}$. L'argument du fait 2.2.4 montre qu'on peut plonger le groupe symétrique sur $\{0, \ldots, n_i - 1\}$ dans $[\![\varphi]\!]$, de façon à envoyer le n_i-cycle $(012\ldots)$ sur ψ_i. Donc ψ_i est produit d'éléments d'ordre 2. $\square$

Corolaire 3.3.5. — *Le quotient $[\![\varphi]\!]^0/[\![\varphi]\!]'$ est un 2-groupe abélien élémentaire et l'abélianisé $[\![\varphi]\!]/[\![\varphi]\!]'$ est isomorphe au produit direct de $\mathbf{Z}$ et de $[\![\varphi]\!]^0/[\![\varphi]\!]'$.* $\square$

La classe d'isomorphie du groupe $[\![\varphi]\!]^0/[\![\varphi]\!]'$ est donc déterminée par sa dimension comme espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Celle-ci dépend, en général, de φ. Matui [Ma06] prouve que ce groupe est isomorphe au groupe des co-invariants sous φ du groupe des fonctions continues de X dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

3.4. Approximation et présentation infinie

Définition 3.4.1. — *Un (semi-)groupe G est* finiment approximable *(ou LEF « locally embeddable into finite groups ») s'il vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes*

- *tout système fini d'égalités et inégalités sans paramètre ayant une solution dans G a une solution dans un (semi-)groupe fini ;*
- *G est isomorphe à un sous-groupe d'un ultraproduit de (semi-)groupes finis ;*
- *(pour G groupe dénombrable) G est isomorphe au quotient d'un groupe résiduellement fini par un sous-groupe distingué N qui est réunion d'une suite croissante de sous-groupes distingués finis de G.*

Un groupe est finiment approximable comme groupe si et seulement s'il l'est comme (semi-)groupe. Un (semi-)groupe est finiment approximable si et seulement si tout ses sous-(semi-)groupes de type fini le sont. Un (semi-)groupe résiduellement fini est finiment approximable ; la réciproque est vraie pour les (semi-)groupes de présentation finie mais pas pour les groupes de type fini (ces observations sont dues à Stëpin [St84]). Il découle de la définition qu'ils forment une classe stable par passage aux sous-(semi-) groupes et limites inductives filtrantes. On va montrer le résultat suivant.

Théorème 3.4.2 (Grigorchuk-Medynets [GrMe12]). — *Pour tout X compact totalement séparé muni d'une action minimale de $\mathbf{Z}$, le semi-groupe (et donc le groupe) plein-topologique est finiment approximable.*

Notons que ce résultat est faux pour un autohoméomorphisme arbitraire, voir l'exemple de la proposition 3.7.4.

Corolaire 3.4.3 (Matui [Ma06]). — *Pour $\Gamma = \mathbf{Z}$, considérons un sous-décalage (Γ, X) minimal infini. Soit Λ un sous-groupe de $[\![\Gamma]\!]$ (ou sous-semi-groupe de $[\![\Gamma]\!]_{\mathrm{s}}$) contenant $[\![\Gamma]\!]'$. Alors il n'est pas de présentation finie.*

Démonstration. — Par le théorème 3.4.2, Λ est finiment approximable ; si par l'absurde il est de présentation finie, il en découle qu'il est aussi résiduellement fini, et donc que $[\![\Gamma]\!]'$ est aussi résiduellement fini. Or c'est un groupe simple par le théorème 3.1.6, et il est infini par le fait 2.2.4, ce qui est contradictoire. (Cet argument, basé sur la résiduelle finitude, combine l'idée de Grigorchuk-Medynets [GrMe12] d'utiliser la résiduelle finitude, avec, en amont, l'approche de Matui qui a permis de montrer le théorème 3.4.2.) □

Remarque 3.2. — Il est fructueux et naturel de penser à un résultat de présentation infinie $G = G_\infty$ comme un résultat d'approximation : un groupe (de type fini) de présentation infinie peut être approché par des groupes G_n obtenus en tronquant une présentation sur un nombre fini de générateurs, ou parfois en prenant des quotients G_n/H_n de ces derniers (par exemple finis) qui ne sont pas quotients de G_∞.

Le théorème 3.4.2 se prouve par spécification au cas des sous-décalages, auquel cas il est valable sous des conditions moins restrictives que la minimalité. On a besoin d'introduire quelques notions classiques.

Définition 3.4.4. — *Dans un décalage $A^{\mathbf{Z}}$, un* motif *est une fonction partiellement définie, à domaine de définition un intervalle entier fini, de $\mathbf{Z}$ vers A, à translation près. Un* motif *d'un sous-décalage $X \subset A^{\mathbf{Z}}$ est* autorisé *ou* interdit *selon qu'il est ou non la restriction d'un élément de X à un intervalle entier fini.*

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^{\mathbf{Z}}$ est de type fini *s'il est défini par un nombre fini de motifs interdits, autrement dit s'il existe un clouvert $U \subset A^{\mathbf{Z}}$ tel que $X = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} T^n U$, où T est la fonction de décalage sur $A^{\mathbf{Z}}$.*

On dit qu'un sous-décalage $X \subset A^{\mathbf{Z}}$ est irréductible *si pour tout couple (w_1, w_2) de motifs autorisés dans X, il existe un motif autorisé de X admettant w_1 comme segment initial et w_2 comme segment terminal.*

Notons qu'un sous-décalage $X \subset A^{\mathbf{Z}}$ est caractérisé par l'ensemble de ses motifs autorisés. On vérifie aisément qu'un sous-décalage de type fini irréductible sur $\mathbf{Z}$ a un ensemble dense de points périodiques, et qu'un sous-décalage minimal sur $\mathbf{Z}$ est également irréductible (voir [MH38]).

Proposition 3.4.5. — *Pour tout sous-décalage irréductible sur $\mathbf{Z}$, le semi-groupe (et donc le groupe) plein-topologique est finiment approximable.*

Lemme 3.4.6. — *Soit $X \subset A^{\mathbf{Z}}$ un sous-décalage de type fini irréductible sur $\mathbf{Z}$ et non vide. Alors X est l'intersection décroissante d'une suite de sous-décalages de type fini irréductibles.*

Démonstration. — Pour tout ensemble de mots Z, on note X_Z le sous-décalage défini par l'ensemble de mots interdits Z. Pour $n \geq 1$, soit P_n l'ensemble des motifs interdits de taille n. Clairement $X = \bigcap_{n\geq 1} X_{P_n}$ et chaque X_{P_n} est un sous-décalage de type fini ; il reste à vérifier que X_{P_n} est irréductible. Considérons des motifs w_1 et w_2 de X_{P_n}, qu'on peut supposer de taille au moins n. Soient u_1 le segment terminal de taille n de w_1 et u_2 le segment initial de taille n de w_2. Comme u_1 et u_2 sont des motifs de X, il existe, par irréductibilité, un motif v de X ayant u_1 pour segment initial et u_2 pour segment terminal. En écrivant $v = u_1 u u_2$, on en déduit que $w_1 u w_2$ est autorisé dans X_{P_n}, ce qui démontre que X_{P_n} est irréductible. □

Preuve de la proposition 3.4.5. — Si X est fini, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc X infini. Il découle alors de l'irréductibilité que X est sans point isolé.

Grâce au lemme 3.4.6, on écrit $X = \bigcap X_n$ (intersection décroissante) où $X_n \subset A^{\mathbf{Z}}$ est un sous-décalage ayant un ensemble dense de points périodiques. On affirme que le morphisme naturel $\varinjlim [\![X_n]\!]_{\mathrm{s}} \to [\![X]\!]_{\mathrm{s}}$ est un isomorphisme. La surjectivité découle de celle de $[\![X_n]\!]_{\mathrm{s}} \to [\![X]\!]_{\mathrm{s}}$ pour tout n ; montrons l'injectivité. Par la surjectivité de $[\![A^{\mathbf{Z}}]\!]_{\mathrm{s}} \to [\![X]\!]_{\mathrm{s}}$, cela revient à vérifier que si $\psi, \psi' \in [\![A^{\mathbf{Z}}]\!]_{\mathrm{s}}$ et ψ et ψ' coïncident sur X, alors ils coïncident sur X_n pour n assez grand. Il suffit, par compacité, de le montrer localement sur x. En supposant le contraire, il existe donc $x \in X$ tel que pour tout voisinage clouvert V de x et tout n, les fonctions ψ et ψ' ne coïncident pas sur $V \cap X_n$. On choisit V sur qui ψ et ψ' sont des translations par des entiers distincts $k \neq k'$. Soit $\ell = |k - k'|$. Ainsi, tout élément de $U \cap X$ est ℓ-périodique, si bien que $U \cap X$ est fini, et donc x est isolé dans X, ce qui est contradictoire.

Or $[\![X_n]\!]_{\mathrm{s}}$ agit sur X_n avec un ensemble dense d'orbites finies, donc est résiduellement fini. Comme être finiment approximable est stable par limites inductives filtrantes, on en déduit que $\varinjlim [\![X_n]\!]_{\mathrm{s}}$ l'est aussi, et donc $[\![X]\!]_{\mathrm{s}}$ est finiment approximable. □

Remarque 3.3. — Une preuve de la proposition 3.4.5 dans le cadre restreint aux groupes pleins-topologiques (au lieu des semi-groupes) aurait été compliquée par le fait que les applications de restriction ne sont pas forcément continues.

Démonstration du théorème 3.4.2. — Montrons que le semi-groupe $[\![X]\!]_{\mathrm{s}}$ est finiment approximable. Il suffit de montrer que quelle que soit la partie finie F, il existe un morphisme u du sous-semi-groupe engendré par F vers un groupe qu'on sait déjà finiment approximable, et qui est injectif en restriction à F. On indexe injectivement $F = \{f_i\}$ et on choisit pour $i \neq j$ un élément $x_{ij} \in X$ tel que $f_i(x_{ij}) \neq f_j(x_{ij})$. On considère une partition finie de X en clouverts, sur lesquels les f_i se trivialisent, et séparant $f_i(x_{ij})$ et $f_j(x_{ij})$ pour tous $i \neq j$. On considère l'algèbre booléenne $\mathbf{Z}$-invariante engendrée par cette partition, Y le quotient correspondant. On voit que Y est minimal et, par le fait 2.1.2, est un sous-décalage. On note $[\![X \curlywedge Y]\!]_{\mathrm{s}}$ l'ensemble des éléments de $[\![X]\!]_{\mathrm{s}}$ dont la fonction étagée associée est constante sur les fibres de $X \to Y$ (ceci est défini en toute généralité (Γ quelconque) par W. Krieger [Kri80]). Ainsi on a un morphisme u de semi-groupes canonique $[\![X \curlywedge Y]\!]_{\mathrm{s}} \to [\![Y]\!]_{\mathrm{s}}$; on remarque que $F \subset [\![X \curlywedge Y]\!]_{\mathrm{s}}$ et que par construction f_i et f_j ont des images distinctes par cette projection, pour tous $i \neq j$. Comme $[\![Y]\!]_{\mathrm{s}}$ est finiment approximable par la proposition 3.4.5, on en déduit que $[\![X]\!]_{\mathrm{s}}$ l'est aussi. $\square$

3.5. Sous-groupes abéliens libres et sous-semi-groupes libres

Dans tout groupe, il est naturel de s'intéresser à la question d'existence de sous-groupes et sous-semi-groupes libres. On commence par la proposition suivante.

Proposition 3.5.1. — *Soient X un compact totalement séparé infini et φ un auto-homéomorphisme minimal. Alors $[\![\varphi]\!]'$ n'est pas de torsion ; il contient en fait un groupe abélien libre de rang infini.*

Démonstration. — On choisit un clouvert non vide $U \subset X$ disjoint de $V = \varphi(U)$. Soit σ l'élément d'ordre deux qui échange U et V par action de $\varphi^{\pm 1}$ et agit par l'identité ailleurs. Alors $\varphi_V = \sigma\varphi_U\sigma^{-1}$, et on voit donc que σ et φ_U engendrent un groupe isomorphe au groupe $\mathbf{Z}^2 \rtimes \langle\sigma\rangle$ (qui est un produit en couronne $\mathbf{Z} \wr (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$). Ce groupe contient bien la diagonale de $\mathbf{Z}^2$ dans son sous-groupe dérivé.

Si W est un clouvert de X, notons $[\![\varphi]\!]_{[W]}$ l'ensemble des éléments de $[\![\varphi]\!]$ qui sont l'identité hors de W. Soit W un clouvert non vide et montrons que $[\![\varphi]\!]_{[W]}$ n'a pas un dérivé de torsion. Comme l'action est minimale, la fonction de retour φ_W est bien définie, et on a $[\![\varphi_W]\!] = [\![\varphi]\!]_{[W]}$. Le cas précédent s'applique donc.

Considérant une famille infinie (W_n) de clouverts non vides deux à deux disjoints, les sous-groupes $[\![\varphi]\!]'_{[W_n]} \subset [\![\varphi]\!]'$ ont des supports deux à deux disjoints, si bien que $[\![\varphi]\!]'$ contient une copie du produit direct restreint $\bigoplus_n [\![\varphi]\!]'_{[W_n]}$. Comme $[\![\varphi]\!]'_{[W_n]}$ contient un sous-groupe cyclique infini, on en déduit que $[\![\varphi]\!]'$ contient un groupe abélien libre de rang infini dénombrable. $\square$

Notons que le groupe de l'allumeur de réverbères $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\wr\mathbf{Z}$ contient un semi-groupe libre à deux générateurs (cela se voit directement, et a été largement généralisé, par exemple par Rosenblatt [Ros74] au cas des groupes de type fini résolubles non virtuellement nilpotents). Le théorème suivant, dû à Matui [Ma12], généralise une construction de Dahmani, Fujiwara et Guirardel [DFG11] dans le cas des échanges d'intervalles.

Rappelons qu'un groupe est *à croissance exponentielle* s'il possède une partie finie S telle qu'en notant S^n l'ensemble des produits de n élements de S, on ait $\underline{\lim}\#(S^n)^{1/n} > 1$.

Théorème 3.5.2 (Matui). — *Soient X un compact totalement séparé et φ un auto-homéomorphisme minimal. On suppose en outre que (X,φ) n'est pas un odomètre (cf. définition 2.1.3). Alors tout sous-groupe du groupe plein-topologique $[\![\varphi]\!]$ contenant $[\![\varphi]\!]'$ contient un sous-groupe isomorphe au groupe de l'allumeur de réverbères. En particulier, il contient un semi-groupe libre à deux générateurs et a une croissance exponentielle.*

Démonstration. — Comme X n'est pas un odomètre, commençons par observer que, par compacité, il existe $x\in X$ possédant des voisinages clouverts arbitrairement petits à orbite infinie dans $\mathrm{Clo}(X)$.

Il suffit bien entendu de démontrer le théorème dans le cas de $[\![\varphi]\!]'$, mais commençons par $[\![\varphi]\!]$ pour éviter, dans un premier temps, des complications techniques non essentielles. Comme x n'est pas fixe, on peut se donner un voisinage clouvert U de x disjoint de $\varphi(U)$, et dont l'orbite dans $\mathrm{Clo}(X)$ par φ est infini. Soit $\psi=\varphi_U$ la fonction de premier retour. On remarque que φ_U n'est pas un odomètre : sinon, il existerait un entier $m\ge 1$, une partition $(U_i)_{i\in\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}}$ de U en clouverts et des $n_i\in\mathbf{Z}$ tels que $\psi(U_i)=U_{i+1}$ pour tout i et $\psi=\varphi^{n_i}$ sur U_i. Si $n=\sum n_i$, on en déduit que $\psi^m=\varphi^n$ sur U, donc $\varphi^n(U)=U$ contredisant le choix de U. Il existe donc un clouvert V inclus dans U, dont la ψ-orbite est infinie.

Vérifions que dans le $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^U$, la famille des $\mathbf{1}_{\psi^n V}$ est libre : sinon on a une relation du type $\sum_{k=a}^b \varepsilon_i\mathbf{1}_{\psi^n V}=0$ avec $a\le b$, $\varepsilon_i\in\{0,1\}$ et $\varepsilon_a=\varepsilon_b=1$. Elle montre, en translatant, que pour tout $k\ge b$, l'élément $\mathbf{1}_{\psi^k V}$ est dans le sous-groupe additif engendré par les $\mathbf{1}_{\psi^\ell V}$ pour $\ell\in\{a,\dots k-1\}$; par récurrence il en découle qu'il appartient en fait au sous-groupe additif engendré par les $\mathbf{1}_{\psi^\ell V}$ pour $\ell\in\{a,\dots b-1\}$, qui est un sous-groupe fini indépendant de k. Ceci contredit que les $(\mathbf{1}_{\psi^k V})_{k\ge b}$ sont deux à deux distincts ; la famille $(\mathbf{1}_{\psi^n V})_{n\in\mathbf{Z}}$ est donc libre.

Si $F\in(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{(\mathbf{Z})}$ est une partie finie de $\mathbf{Z}$, on définit $A_F=\sum_{n\in F}\mathbf{1}_{\psi^n U}\in(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^U$, et $\sigma_F\in[\![\varphi]\!]$ comme l'involution qui échange A_F et $\varphi(A_F)$ par action de $\varphi^{\pm1}$, et agit par l'identité ailleurs. On a $\sigma_F\in[\![\varphi]\!]$ et l'application $F\mapsto\sigma_F$ est un morphisme injectif, par ce qui précède. Si on définit Ψ comme le produit (commutatif) de ψ et $\varphi\circ\psi\circ\varphi^{-1}$, alors on vérifie que $\Psi\circ\sigma_F\circ\Psi^{-1}=\sigma_{T(F)}$, où $T:n\mapsto n+1$ est la translation de $\mathbf{Z}$. Ainsi Ψ et $\sigma_{\{0\}}$ engendrent un groupe H isomorphe au groupe de l'allumeur de réverbères.

Pour obtenir un allumeur à l'intérieur de $[\![\varphi]\!]'$, on suppose en outre que les $\varphi^i U$ sont disjoints pour $0\le i\le 3$ (on peut le supposer car l'orbite de x a au moins 4 éléments). Considérons le groupe H précédemment construit, et l'élément d'ordre deux s échangeant $U \cup \varphi(U)$ et $\varphi^2(U) \cup \varphi^3(U)$ par action de $\varphi^{\pm 2}$ et agissant par l'identité ailleurs ; on voit que le groupe engendré par s et H est isomorphe au produit semidirect $(H \times H) \rtimes \langle s \rangle$, où s agit par permutation des facteurs. Il est facile de voir que ce groupe contient, dans son dérivé, un groupe isomorphe à l'allumeur, par exemple le sous-groupe de $H \times H$ engendré par (Ψ, Ψ^{-1}) et $(\sigma_{\{0\}}, \sigma_{\{0\}})$. $\square$

Remarque 3.4. — Réciproquement, dans le cas d'un odomètre X (pour une action d'un groupe abélien Γ quelconque), on vérifie sans peine que tout sous-groupe de type fini de $[\![\Gamma, X]\!]$ est virtuellement abélien, donc à croissance polynomiale ; en particulier, $[\![\Gamma, X]\!]$ ne contient pas de sous-semi-groupe libre à deux générateurs.

3.6. Autres résultats

Mentionnons quelques autres résultats sur la structure de $[\![\varphi]\!]$, quand φ est un autohoméomorphisme minimal d'un espace compact totalement séparé.

3.6.1. *Isomorphismes et automorphismes.* — Un résultat de Giordano, Putnam et Skau [GPS99], sous une version légèrement améliorée par Bezuglyi et Medynets [BeM08] (mais avec une approche différente) montre que si φ_1, φ_2 sont des autohoméomorphismes minimaux d'espaces de Cantor X_i et, si pour $i = 1, 2$ on se donne un sous-groupe Λ_i de $[\![\varphi_i]\!]$ contenant $[\![\varphi_i]\!]'$, alors tout isomorphisme $\Lambda_1 \to \Lambda_2$ est induit par un homéomorphisme $h : X_1 \to X_2$, au sens où $\Lambda_2 = h\Lambda_1 h^{-1}$. En particulier, le groupe des automorphismes de Λ_1 s'identifie au normalisateur de Λ_1 dans $\mathrm{Homeo}(X_1)$.

D'autre part, un théorème de la thèse de Boyle [Bo83] (disponible dans [GPS95] ou, généralisé, dans [BoTo98]) montre que pour un autohoméomorphisme minimal φ de l'espace de Cantor X, si $\psi \in [\![\varphi]\!]$ a les mêmes orbites que φ alors le groupe cyclique $\langle \psi \rangle$ est conjugué à $\langle \varphi \rangle$ dans $[\![\varphi]\!]$. Giordano, Putnam et Skau combinent ces résultats pour montrer que, sous les hypothèses précédentes, $\langle \varphi_1 \rangle$ et $\langle \varphi_2 \rangle$ sont conjugués dans $\mathrm{Homeo}(X)$, et déduisent également que le groupe des automorphismes de tout sous-groupe Λ de $[\![\varphi]\!]$ contenant $[\![\varphi]\!]'$ est engendré par $[\![\varphi]\!]$ et par le commutant de φ dans $\mathrm{Homeo}(X)$. En particulier, le groupe des automorphismes extérieurs de $[\![\varphi]\!]^0$ (voir §3.3) s'identifie au commutant C_φ de φ dans $\mathrm{Homeo}(X)$, et celui de $[\![\varphi]\!]$, au quotient de C_φ par son sous-groupe cyclique central $\langle \varphi \rangle$.

3.6.2. *Distorsion.* — Dans $[\![\varphi]\!]$, pour φ autohoméomorphisme minimal d'un espace compact totalement séparé infini X, les sous-groupes cycliques sont non distordus ; autrement dit pour toute partie finie S et tout sous-groupe cyclique infini $\langle z \rangle$ inclus dans le sous-groupe engendré par S, la longueur de z par rapport à S croît linéairement. En effet, en fixant $x \in X$ et en considérant l'action j_x de $[\![\varphi]\!]$ sur $\mathbf{Z}$ par permutations à déplacement borné obtenue en identifiant l'orbite de x à $\mathbf{Z}$ (voir la preuve du lemme 3.3.3), on voit que si la longueur de (z^n) croît sous-linéairement, alors ses orbites dans $\mathbf{Z}$ sont finies ; en particulier, en prenant la réunion des orbites contenues dans $\mathbf{N}$, on obtient une partie finie A telle que $A \triangle \mathbf{N}$ est invariant par z. Or le lemme de Putnam (lemme 3.3.3) implique que le stabilisateur de $\mathbf{N}+k$ est localement fini pour tout $k \in \mathbf{Z}$, et l'argument du début de la preuve du critère 4.1.1 implique alors que le stabilisateur de $A \triangle \mathbf{N}$ est localement fini, si bien que z est de torsion.

Ce résultat de non-distorsion des groupes cycliques est également vrai dans le cas du groupe des échanges d'intervalles (C. Novak [Nov09]).

3.7. Quelques exemples non minimaux

On va indiquer quelques exemples de sous-décalages non minimaux sur $\mathbf{Z}$, pour qui la structure du groupe plein-topologique est très différente du cas d'un sous-décalage minimal.

On commence par une construction due à van Douwen [Do90]. Considérons un alphabet $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ à q lettres. Considérons le décalage propre φ associé à l'ensemble des mots bi-infinis propres

$$A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}} = \{w \in A^{\mathbf{Z}} \mid \forall n \in \mathbf{Z},\ w(n) \neq w(n+1)\}.$$

Proposition 3.7.1. — *Si $q \geq 3$, alors le groupe plein-topologique $[\![A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}]\!]$ contient un sous-groupe libre non abélien (agissant fidèlement sur au moins une orbite).*

Démonstration. — La preuve consiste à plonger dans $[\![A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}]\!]$ le produit libre de q groupes cycliques d'ordre 2, sachant que le produit libre de 3 groupes cycliques d'ordre 2 contient un sous-groupe d'indice 2 libre à 2 générateurs. Pour toute lettre a_i, on définit une involution $\sigma_i \in [\![A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}]\!]$ comme ceci : si $w \in A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}$, on pose

$$\sigma_i(w) = \varphi^{\kappa_i(w)} w, \text{ où } \quad \kappa_i(w) = \begin{cases} 1 & \text{si } w(0) = a_i; \\ -1 & \text{si } w(1) = a_i; \\ 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

en remarquant que les conditions $w(0) = a_i$ et $w(1) = a_i$ sont exclusives. On vérifie bien que σ_i est une involution échangeant les clouverts disjoints $\{\kappa_i = 1\}$ et $\{\kappa_i = -1\}$ et appartient à $[\![A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}]\!]$. Vérifions que les σ_i engendrent un produit libre de groupes cycliques d'ordre 2. Il faut montrer que pour tout mot non trivial $m = \prod_{j=1}^{n} \sigma_{k_j}$ sans deux lettres consécutives égales ($n \geq 1$ et $k_j \neq k_{j+1}$ pour tout $1 \leq j < n$), on a $m \neq 1$. En effet, on choisit w tel que $w(j) = k_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, tel que $w(0) \notin \{k_1, k_n\}$ et $w(n+1) \neq k_n$. Alors on vérifie que $m^{-1} \cdot w = \varphi^{-n} w \neq w$.

Remarquons qu'il existe dans $A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}$ une orbite dense (choisir un mot bi-infini propre contenant tout mot fini propre comme sous-mot) et $[\![A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}]\!]$ agit donc fidèlement sur cette orbite. □

Cette construction est apparentée à la première preuve connue, due à Schreier [Sch27, p. 170], de la résiduelle finitude des groupes libres.

Corolaire 3.7.2 (Schreier). — *Tout groupe libre est résiduellement fini.*

Démonstration. — Clairement on peut se ramener au cas d'un groupe libre de type fini ; un tel groupe peut se plonger dans $[\![A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}]\!]$ par la proposition. Il suffit alors de remarquer que comme la réunion des orbites finies, c'est-à-dire l'ensemble des suites périodiques, est dense dans $A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}$, le groupe plein-topologique $[\![A^{\mathbf{Z}}_{\mathrm{pro}}]\!]$ est résiduellement fini. □

La construction de la proposition a été adaptée par Elek et Monod [EM12] pour exhiber un sous-décalage minimal sur $\mathbf{Z}^2$ dont le groupe plein-topologique contient un sous-groupe libre.

Passons à des exemples plus élémentaires, toujours avec $\Gamma = \mathbf{Z}$. On considère l'alphabet $\{a, b\}$ et $Y \subset A^{\mathbf{Z}}$ l'ensemble des suites ne contenant pas le motif ba. Ainsi Y est constitué des deux suites constantes et des suites commençant par une infinité de a et terminant par une infinité de b. (C'est un sous-décalage de type fini mais pas irréductible.) On peut identifier Y à la compactification $\mathbf{Z} \cup \{\pm\infty\}$ où $n \in \mathbf{Z}$ correspond à l'élément pour lequel la transition de a à b est en position $(n, n+1)$, et $+\infty$ et $-\infty$ correspondent à la suite constante a et b respectivement.

Proposition 3.7.3. — *Sous cette identification, $[\![Y]\!]$ est le groupe des permutations de $\mathbf{Z}$ qui coïncident avec une translation hors d'un ensemble fini.*

Ce groupe est bien connu. Il a un morphisme vers $\mathbf{Z}$, donné par la longueur de translation à l'infini, dont le noyau est constitué des permutations à support fini de $\mathbf{Z}$. Il est finiment approximable (voir la définition 3.4.1) [Neu37, p. 127], mais pas résiduellement fini puisqu'il contient un groupe simple infini. Il peut s'interpréter comme le groupe des permutations du graphe de Cayley standard de $\mathbf{Z}$ qui préserve presque toute arête et fixe les bouts.

Preuve de la proposition 3.7.3. — Soit H_2 le groupe défini dans la proposition. Vérifions d'abord que $H_2 \subset [\![Y]\!]$. Comme H_2 est engendré par la translation $\tau(n) = n+1$ et par la transposition $(0, 1)$, il suffit de vérifier que cette dernière est dans $[\![Y]\!]$: c'est bien le cas car elle est définie par la fonction κ définie par $\kappa(w) = 1$ si $(w(0), w(1), w(2)) = (a, b, b)$, par $\kappa(w) = -1$ si $(w(0), w(1), w(2)) = (a, a, b)$ et $\kappa(w) = 0$ sinon.

Montrons maintenant que tout $\sigma \in [\![Y]\!]$ appartient à H_2. Par définition de $[\![Y]\!]$, il existe k tel que la fonction étagée κ définissant σ est de la forme $\kappa(w) = \kappa'(w|_{\{-k,\dots,k\}})$. Soient f_a, f_b les fonctions constantes égales à a et b sur $\{-k, \dots, k\}$. Soit $N_- = \kappa'(f_b)$ et $N_+ = \kappa'(f_a)$. Alors on voit que $\sigma(n) = n + N_+$ pour tout $n \geq k$ et $\sigma(n) = n + N_-$ pour tout $n \leq -k-1$. Cet argument montre en fait que tout $\sigma \in [\![Y]\!]_{\mathrm{s}}$ est une translation de chaque côté à partir d'un certain rang. Le fait que σ est une permutation implique de plus que $N_+ = N_-$, donc $[\![Y]\!] \subset H_2$. □

L'exemple suivant est similaire. On considère un alphabet $A = \{a, b, c\}$ et on considère le sous-décalage Y' défini par l'interdiction de tous les motifs de deux lettres, sauf aa, ab, bc, cb. Ainsi Y' est constitué de l'ensemble Z des suites translatées de $\dots aaabcbcbc\dots$, et de trois points, la suite constante a (notée $+\infty$, et les deux suites $\dots bcbcbc\dots$, notées $-\infty_{\mathrm{pair}}$ (pour celle avec $w(0) = c$) et $-\infty_{\mathrm{impair}}$ (pour celle avec $w(0) = b$). Comme Z

est dense, pour décrire $[\![Y']\!]$, il suffit de comprendre son action sur Z. On identifie Z à $\mathbf{Z}$ en identifiant n à l'unique suite $w \in Z$ telle $(w(n), w(n+1)) = (a, b)$. Remarquons, pour la consistance des notations, que l'élément correspondant à $2n$ (resp. $2n+1$) tend vers $-\infty_{\text{pair}}$ (resp. $-\infty_{\text{impair}}$) quand n tend vers $-\infty$.

PROPOSITION 3.7.4. — *Sous cette identification,* $[\![Y']\!]$ *est le groupe des permutations de* $\mathbf{Z}$ *qui, en restriction à chacune des parties* $\mathbf{N}$, $-2\mathbf{N}$ *et* $-2\mathbf{N}-1$*, coïncident avec une translation hors d'un ensemble fini.*

La preuve, similaire à celle de la proposition 3.7.3, est laissée au lecteur.

Ce groupe est connu, du moins son sous-groupe d'indice 2 constitué des permutations qui, modulo un ensemble fini, préservent $-2\mathbf{N}$ et $-2\mathbf{N}-1$: c'est le groupe de Houghton H_3 (introduit dans [Hou78]). En effet, si on munit $\mathbf{Z}$ d'une structure de graphe en joignant n à $n+1$ pour tout $n \geq -1$ et n à $n+2$ pour tout $n \leq -2$, le graphe obtenu est constitué de 3 branches infinies jointes en 0 ; H_3 est par définition le groupe des permutations de $\mathbf{Z}$ qui préservent la structure de graphe sauf en un nombre fini d'arêtes et fixent les bouts. Ici, $[\![Y']\!]$ est son sur-groupe d'indice 2, le stabilisateur du bout $+\infty$. On déduit que $[\![Y']\!]$ est un groupe de présentation finie (puisque H_3 l'est, par un résultat non publié de Burns et Solitar, prouvé par Brown dans [Bro87]). Comme il contient le groupe simple infini des permutations à support fini alternées, $[\![Y']\!]$ n'est donc pas finiment approximable (voir la définition 3.4.1), en contraste avec $[\![Y]\!]$.

En général, pour $n \geq 2$, le groupe de Houghton H_n est le groupe des permutations d'un graphe constitué de n branches infinies jointes en un point, qui préservent la structure de graphe sauf en un nombre fini d'arêtes, et fixent les bouts. Une généralisation facile de l'exemple précédent fournit un sous-décalage de type fini dont le groupe plein-topologique contient le groupe de Houghton H_n comme sous-groupe d'indice fini.

4. MOYENNABILITÉ

4.1. Le critère

On va commencer par une construction générale. étant donné un groupe Γ, on définit le groupe des *translations par morceaux* $\mathrm{TM}(\Gamma)$ comme le groupe plein-topologique associé à l'action à gauche de Γ sur l'espace topologique discret Γ. Si Γ est muni d'une métrique invariante à gauche dont les boules sont finies (tout groupe dénombrable possède une telle métrique), on peut interpréter ce groupe de manière purement métrique, à savoir comme l'ensemble des permutations σ de Γ à *déplacement borné* au sens où $\sup_{\gamma\in\Gamma} d(\gamma, \sigma(\gamma)) < \infty$.

Si Γ agit par autohoméomorphismes sur un espace topologique X, et si $x \in X$, soit i_x l'application orbitale $\gamma \mapsto \gamma x$ de Γ vers X. Si x a un stabilisateur trivial, i_x est une bijection de Γ vers l'orbite Γx, et l'action de $[\![\Gamma, X]\!]$, restreinte à l'orbite Γx, est conjuguée, via la bijection i_x, à une action de $[\![\Gamma, X]\!]$ sur Γ par translations par morceaux, donnée par le morphisme $j_x : [\![\Gamma, X]\!] \to \mathrm{TM}(\Gamma)$ défini par $j_x(\gamma) = i_x^{-1} \circ \gamma \circ i_x$.

On a vu (proposition 3.7.1) que pour $\Gamma = \mathbf{Z}$, pour un sous-décalage convenable (X, φ) avec une orbite dense, le groupe $[\![\mathbf{Z}, X]\!] = [\![\varphi]\!]$ peut contenir un sous-groupe libre agissant fidèlement sur l'orbite d'un point x. Par conséquent, en prenant l'image par j_x, on voit que le groupe $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ contient également des sous-groupes libres, et n'est donc pas moyennable. Cependant c'est en utilisant ce groupe que Juschenko et Monod prouvent leur résultat.

Théorème 4.1.1 (Critère de Juschenko-Monod). — *Soit G un groupe et considérons une action de G sur $\mathbf{Z}$ par permutations à déplacement borné, c'est-à-dire, donnée par un morphisme $G \to \mathrm{TM}(\mathbf{Z})$. On suppose que le stabilisateur $\{g \in G \mid g(\mathbf{N}) = \mathbf{N}\}$ de $\mathbf{N}$ est moyennable. Alors G est lui-même moyennable.*

On discutera la preuve de ce critère plus loin. Commençons par la principale conséquence.

Corolaire 4.1.2. — *Le groupe plein-topologique $[\![\varphi]\!]$ associé à un autohoméomorphisme minimal d'un compact totalement séparé X est moyennable.*

Le théorème s'applique : fixons en effet $x \in X$ et faisons agir $[\![\varphi]\!]$ sur $\mathbf{Z}$ par permutations à déplacement borné via j_x. Alors le stabilisateur de $\mathbf{N}$ est égal au stabilisateur $[\![\varphi]\!]_{[x\rangle}$ de l'orbite positive $\{\varphi^n x : n \in \mathbf{N}\}$ de x, qui, par le lemme de Putnam (lemme 3.3.3) est localement fini (c'est-à-dire réunion croissante filtrante de groupes finis), donc moyennable.

4.2. Sur la démonstration du critère

Le critère est basé sur le résultat analytique suivant. Notons C_2 le groupe cyclique d'ordre 2 et $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}$ le groupe des fonctions à support fini $\mathbf{Z} \to \mathsf{C}_2$, qui s'identifie à l'ensemble des parties finies de $\mathbf{Z}$.

Théorème 4.2.1 (Juschenko-Monod). — *L'action affine de $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})} \rtimes \mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ sur $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}$ préserve une moyenne.*

Ici, l'action est simplement l'action affine engendrée par l'action $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-linéaire de $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ et par le groupe des translations. Le théorème s'applique pour démontrer le critère 4.1.1 à l'aide du fait suivant.

Fait 4.2.2. — *Si un groupe discret G agit sur un ensemble X en préservant une moyenne, et si chaque point a un stabilisateur moyennable, alors G est lui-même moyennable.*

Démonstration. — On commence par rappeler que G est moyennable si, et seulement si, pour toute action de G par transformations affines continues sur un espace localement convexe préservant un convexe compact non vide K, l'action fixe un point de K (au besoin, on choisit cela comme définition de moyennabilité ; voir par exemple [Gre]). Soit donc une telle action ; il suffit en fait de montrer que G préserve une probabilité sur les boréliens de K, car le barycentre de cette dernière (voir par exemple [Luk, Theorem 2.29]) est alors un point de K fixé par G.

On choisit donc un sous-ensemble $I \subset X$ contenant exactement un élément de chaque G-orbite, et pour tout $i \in I$ soit H_i son stabilisateur. Par moyennabilité, H_i fixe un point $\kappa_i \in K$. L'application $i \mapsto \kappa_i$ s'étend de manière unique en une fonction G-équivariante $X \to K$. L'image directe d'une moyenne invariante sur X est une moyenne invariante sur K, définissant une forme linéaire positive normalisée G-invariante sur $\ell^\infty(K)$. Celle-ci se restreint en une forme linéaire positive normalisée sur $C(K)$, qui définit par le théorème de représentation de Riesz une unique mesure de probabilité de Radon sur K, qui par unicité est G-invariante. □

Preuve du théorème 4.1.1. — Soit maintenant G vérifiant le critère du théorème 4.1.1 et montrons que G est moyennable.

L'hypothèse de stabilisateur implique en particulier que le noyau de l'action de G sur $\mathbf{Z}$ est moyennable ; la moyennabilité étant stable par extensions et passage au quotient, on peut donc se ramener au cas d'une action fidèle, ce qui revient à supposer que G est contenu dans $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$.

Vérifions d'abord que pour toute partie B de $\mathbf{Z}$ telle que $\mathbf{N} \triangle B$ est finie, le stabilisateur G_B de B dans G est moyennable. Commençons par le cas de $B = \mathbf{N} + k = \{k, k+1, \dots\}$ pour $k \in \mathbf{Z}$. En effet, remarquons d'abord que tout sous-groupe de $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ préserve une moyenne sur chacune de ses orbites dans $\mathbf{Z}$. Si par l'absurde $G_{\mathbf{N}+k}$ est non moyennable, alors pour tout $j \in \mathbf{Z}$, en appliquant le fait 4.2.2 à l'orbite de j pour l'action de $G_{\mathbf{N}+k}$, on obtient que le stabilisateur $(G_{\mathbf{N}+k})_j$ est non moyennable. Or pour $j = k$ ce stabilisateur est contenu dans $G_{\mathbf{N}+k+1}$ et pour $j = k - 1$ ce stabilisateur est contenu dans $G_{\mathbf{N}+k-1}$. Ceci montre que $G_{\mathbf{N}+k+1}$ et $G_{\mathbf{N}+k-1}$ sont non moyennables, et donc par une récurrence de chaque côté, $G_{\mathbf{N}+j}$ est non moyennable pour tout $j \in \mathbf{Z}$, contredisant pour $j = 0$ l'hypothèse du critère. Si maintenant B est quelconque, il existe une permutation à support fini de $\mathbf{Z}$ échangeant B et $\mathbf{N} + k$ pour un certain (unique) $k \in \mathbf{Z}$, on remarque alors que le stabilisateur G_B est inclus dans le sous-groupe engendré par le stabilisateur de $G_{\mathbf{N}+k}$, qui est moyennable par ce qui précède, et par le groupe des permutations à support fini, qui est distingué et moyennable. Le stabilisateur G_B est donc lui-même moyennable.

Terminons maintenant la preuve. On a une première action, dite ordinaire, de $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ sur le $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espace vectoriel $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}$, donnée par $w \cdot \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{w(A)}$. On a également une action affine de $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ sur $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}$, de partie linéaire l'action ordinaire, donnée par

$$w \cdot \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{w(A)} + \mathbf{1}_{\mathbf{N}} - \mathbf{1}_{w(\mathbf{N})}.$$

Le stabilisateur de $\mathbf{1}_A$ pour cette action affine est égal au stabilisateur pour l'action ordinaire de la différence symétrique $A \triangle \mathbf{N}$. Cette action affine préserve une moyenne par le théorème 4.2.1. Pour toute partie finie A, le stabilisateur de $\mathbf{1}_A$ dans G pour l'action affine est égal au stabilisateur $G_{\mathbf{N}\triangle A}$ de $\mathbf{N} \triangle A$ pour l'action ordinaire dont on vient de vérifier la moyennabilité. Le fait 4.2.2 s'applique donc à l'action affine de G sur $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}$, si bien que G est moyennable. $\square$

4.3. Preuve du théorème 4.2.1

Le groupe $\mathsf{C}_2^{\mathbf{Z}}$ des fonctions $\mathbf{Z} \to \mathsf{C}_2$ est muni de la topologie produit, qui en fait un groupe compact, et de la mesure produit de la mesure équirépartie sur $\mathsf{C}_2 = \{0,1\}$, qui est sa mesure de Haar.

Juschenko et Monod observent que l'existence d'une moyenne invariante comme dans le théorème 4.2.1 découle de l'existence d'une suite d'éléments non nuls $f_n \in L^2(\mathsf{C}_2^{\mathbf{Z}}, \mathbf{R})$ telle que

(1) (f_n) est asymptotiquement $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$-invariante, c'est-à-dire que pour tout $g \in \mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ on a $\lim_{n\to\infty} \|f_n - gf_n\|_2/\|f_n\|_2 = 0$;

(2) (f_n) est asymptotiquement supportée par l'hyperplan $H_0 = \mathsf{C}_2^{\mathbf{Z}\smallsetminus\{0\}} = \{u \in \mathsf{C}_2^{\mathbf{Z}} : u(0) = 0\}$, au sens où $\lim_{n\to\infty} \|f_n \mathbf{1}_{H_0}\|_2/\|f_n\|_2 = 1$.

En effet, considérons une telle suite (f_n). La suite des transformées de Fourier $(\widehat{f_n})$ est une suite dans $\ell^2\big(\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}\big)$, asymptotiquement $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$-invariante par (1). La transformée de Fourier entrelace la multiplication par $\mathbf{1}_{H_0}$ à la projection sur l'ensemble des fonctions dans $\ell^2\big(\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}\big)$ qui sont invariantes par $\mathsf{C}_2^{(\{0\})}$. Donc par (2), la suite $(\widehat{f_n})$ est asymptotiquement $\mathsf{C}_2^{(\{0\})}$-invariante. Puisque $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})} \rtimes \mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ est engendré par $\mathsf{C}_2^{(\{0\})}$ et $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$, on en déduit que la suite $(\widehat{f_n})$ est asymptotiquement $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})} \rtimes \mathrm{TM}(\mathbf{Z})$-invariante ; autrement dit en posant $u_n = |\widehat{f_n}|/\|f_n\|_2$, on a $\|u_n\|_2 = 1$ et $\|u_n - gu_n\|_2 \to 0$ pour tout $g \in \mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})} \rtimes \mathrm{TM}(\mathbf{Z})$. Ainsi $\|u_n^2\|_1 = 1$ et, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|u_n^2 - gu_n^2\|_1 \leq \|u_n + gu_n\|_2 \|u_n - gu_n\|_2 \leq 2\|u_n - gu_n\|_2,$$

si bien que $\|u_n^2 - gu_n^2\|_1 \to 0$. Par conséquent, si m est une valeur d'adhérence faible-* dans $\ell^\infty\big(\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}\big)$ de la suite de probabilités (u_n^2) de $\ell^1\big(\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}\big)$, alors m définit une moyenne $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})} \rtimes \mathrm{TM}(\mathbf{Z})$-invariante sur $\mathsf{C}_2^{(\mathbf{Z})}$.

Cette observation étant faite, Juschenko et Monod donnent explicitement une suite $(f_n)_{n\geq 1}$, à savoir, en identifiant C_2 et $\{0,1\}$

$$\begin{array}{rccl} f_n\colon & \{0,1\}^{\mathbf{Z}} & \to &]0,1] \\ & x = (x_j)_{j\in\mathbf{Z}} & \mapsto & \exp\left(-n \sum_{j\in\mathbf{Z}} x_j e^{-|j|/n}\right) \end{array}$$

La condition (2) se vérifie facilement, tandis que (1) demande plus de travail (d'analyse élémentaire).

On va utiliser ici une autre suite de fonctions, qui nous a été indiquée par M. de la Salle, pour laquelle ces vérifications sont plus directes. On définit, pour $n \geq 1$

$$\begin{array}{rrcl} h_n\colon & \{0,1\}^{\mathbf{Z}} & \to & [0,1] \\ & x = (x_j)_{j\in\mathbf{Z}} & \mapsto & \displaystyle\prod_{j\in\mathbf{Z}} h_{nj}(x_j), \end{array}$$

avec

$$(h_{nj}(0), h_{nj}(1)) = \sqrt{2}(\cos\theta_{nj}, \sin\theta_{nj}); \qquad \theta_{nj} = \frac{\pi}{4}\min\left(\sqrt{\frac{|j|}{n}}, 1\right) \in [0, \pi/4].$$

Remarquons que le produit définissant $h_n(x)$ est fini puisque $h_{nj} = 1$ si $|j| > n$. On observe également que $\theta_{n0} = 0$, si bien que $h_{n0}(1) = 0$ et $h_n(x) = 0$ si $x_0 = 1$. En d'autres termes, on a $h_n = h_n \mathbf{1}_{H_0}$, ce qui donne (2) (avec h_n en lieu et place de f_n). Notons que $\|h_n\|_2 = 1$ pour tout $n \geq 1$, puisque $\|h_{nj}\|_2 = 1$ pour tous n et j (l'ensemble $\{0,1\}$ étant muni de la mesure de Haar de C_2). Il reste à prouver (1), ou, ce qui revient au même :

Proposition 4.3.1. — *Pour tout $g \in \mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ on a*

$$\lim_{n\to\infty} \langle h_n, g^{-1}h_n\rangle = 1.$$

Démonstration. — On a $g^{-1}h_n(x) = h_n(gx)$ et $(gx)_j = x_{g^{-j}(j)}$, si bien que $(g^{-1}h_n)(x) = \prod_{j\in\mathbf{Z}} h_{n\,g(j)}(x_j)$. On a donc, par le théorème de Fubini, la formule

$$\langle h_n, g^{-1}h_n\rangle = \prod_{j\in\mathbf{Z}} \langle h_{nj}, h_{n\,g(j)}\rangle = \prod_{j\in\mathbf{Z}} \cos(\theta_{nj} - \theta_{n\,g(j)}).$$

En utilisant l'inégalité $\cos(x) \geq \exp(-x^2)$ valable pour tout $x \in [-\pi/4, \pi/4]$, on en déduit

$$\langle h_n, g^{-1}h_n\rangle \geq \exp\left(-\sum_{j\in\mathbf{Z}} (\theta_{nj} - \theta_{n\,g(j)})^2\right). \tag{4.1}$$

On va majorer la somme dans le terme de droite. En utilisant que

$$|\sqrt{j} - \sqrt{k}| \leq \frac{|j-k|}{\max(1, \sqrt{j})}, \quad \forall j, k \in \mathbf{N},$$

on obtient, en posant $c = \sup_{j\in\mathbf{Z}} \big||g(j)| - |j|\big|$

$$|\theta_{nj} - \theta_{n\,g(j)}| \leq \frac{\pi c}{4\sqrt{n}} \frac{1}{\max(1, \sqrt{|j|})}.$$

Il en découle, en remarquant en outre que $\theta_{nj} - \theta_{n\,g(j)} = 0$ si $|j| \geq n + c$

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbf{Z}}(\theta_{nj}-\theta_{n\,g(j)})^2 &= \sum_{|j|\le n+c}(\theta_{nj}-\theta_{n\,g(j)})^2\\ &\le \frac{\pi^2c^2}{16n}\sum_{|j|\le n+c}\frac{1}{\max(1,|j|)}\\ &\le \frac{\pi^2c^2}{16n}(3+\log(n+c))\\ &= O\left(c^2\frac{\log n}{n}+c^2\log c\right)=O_c\left(\frac{\log n}{n}\right)\end{aligned}$$

donc par (4.1) on obtient que $\langle h_n, g^{-1}h_n\rangle$ tend bien vers 1 à g fixé. $\square$

Remarque 4.1. — La preuve de la proposition 4.3.1 montre que pour tout $g \in \mathrm{TM}(\mathbf{Z})$ fixé, on a $1 - \langle h_n, gh_n\rangle = O(\log(n)/n)$, ou de manière équivalente $\|h_n - gh_n\|_2 = O((\log n/n)^{1/2})$.

D'autre part, remarquons que la preuve de la proposition s'applique sans changement à tout $g \in \mathrm{TM}(|\mathbf{Z}|)$, où ce dernier désigne le groupe des permutations g de $\mathbf{Z}$ telles que $\sup_{n\in\mathbf{Z}}\Big||g(n)| - |n|\Big| < \infty$. Ce groupe contient strictement $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$, par exemple il contient l'involution $n \mapsto -n$ qui n'est pas dans $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$; il est également isomorphe au sous-groupe $\mathrm{TM}(\mathbf{N})$ de $\mathrm{TM}(\mathbf{Z})$, comme on voit en conjuguant par la bijection 2-lipschitzienne de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{N}$ qui envoie $n \geq 0$ sur $2n$ et $-n \leq -1$ sur $2n-1$.

APPENDICE A. CLASSES ÉLÉMENTAIRES

Soit $\mathcal{C}$ une classe de groupes (invariante par isomorphie). On définit $\mathscr{E}(\mathcal{C})$ comme la plus petite classe de groupes contenant $\mathcal{C}$ et stable par isomorphie et passage aux sous-groupes, quotients, extensions et limites inductives filtrantes. On l'appelle classe élémentaire engendrée par $\mathcal{C}$.

Le lemme suivant est bien connu.

LEMME A.1. — *On suppose $\mathcal{C}$ stable par passage aux sous-groupes et aux quotients. On définit par récurrence transfinie*

- *$\mathscr{E}_0(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$;*
- *si α est un ordinal, $\mathscr{E}_{\alpha+1}(\mathcal{C})$ comme l'ensemble des groupes isomorphes à une extension à noyau dans $\mathscr{E}_\alpha(\mathcal{C})$ et quotient dans $\mathcal{C}$, ou à une limite directe (c'est-à-dire limite inductive filtrante d'injections) de groupes de $\mathscr{E}_\alpha(\mathcal{C})$;*
- *$\mathscr{E}_\alpha(\mathcal{C}) = \bigcup_{\beta<\alpha}\mathscr{E}_\beta(\mathcal{C})$ pour α ordinal limite.*

Alors $\mathscr{E}(\mathcal{C}) = \bigcup_\alpha \mathscr{E}_\alpha(\mathcal{C})$. En particulier $\mathscr{E}(\mathcal{C})$ est la plus petite classe de groupes stable par isomorphie et par passage aux limites directes et extensions à quotient dans $\mathcal{C}$.

Démonstration. — Par une récurrence transfinie immédiate, chaque $\mathscr{E}_\alpha(\mathcal{C})$ est stable par passage aux sous-groupes, et toute limite directe de groupes dans $\mathscr{E}_\alpha(\mathcal{C})$ est dans $\mathscr{E}_{\alpha+1}(\mathcal{C})$, si bien que $\mathcal{C}' = \bigcup_\alpha \mathscr{E}_\alpha(\mathcal{C})$ est stable par passage aux sous-groupes, quotients et limites directes ; la stabilité à la fois par passage au quotient et aux limites directes implique la stabilité par passage aux limites inductives filtrantes. Il reste à vérifier la stabilité de $\mathcal{C}'$ par passage aux extensions. Vérifions, par récurrence transfinie sur β, qu'il est stable par extension avec quotient dans $\mathscr{E}_\beta(\mathcal{C})$. C'est vrai pour $\beta = 0$; on suppose que c'est acquis pour tout $\beta' < \beta$. Si β est limite il n'y a rien à faire, on suppose donc $\beta = \gamma + 1$. On considère donc un groupe G, extension avec noyau N dans $\mathcal{C}'$ et quotient Q dans $\mathscr{E}_{\gamma+1}(\mathcal{C})$. Si Q est limite directe de groupes dans $\mathscr{E}_\gamma(\mathcal{C})$, alors G est limite directe de leurs images réciproques dans G, qui sont par récurrence dans $\mathcal{C}'$, et donc G est dans $\mathcal{C}'$. Sinon, Q est extension avec noyau M dans C_γ et quotient dans $\mathcal{C}$. L'image réciproque M_1 de M dans G est donc, par récurrence, dans $\mathcal{C}'$, et donc G, extension de noyau M_1 et noyau dans $\mathcal{C}$, l'est donc également. □

Le lemme peut être utile pour montrer qu'un groupe n'appartient pas à la classe élémentaire engendrée par $\mathcal{C}$. Le cas le plus évident (servant souvent sous sa forme contraposée) est le suivant :

Fait A.2. — *Supposons la classe $\mathcal{C}$ stable par passage aux sous-groupes et aux quotients. Si G est un groupe simple de type fini dans $\mathscr{E}(\mathcal{C})$, alors G est dans $\mathcal{C}$.*

Démonstration. — Par hypothèse, G n'a aucune décomposition non triviale en extension ou en limite directe. Cela impose que l'ordinal minimal α tel que $G \in \mathscr{E}_\alpha(\mathcal{C})$ est 0. □

Exemple A.3. — *Soit $\mathcal{A}$ la classe des groupes de type fini abéliens et $\mathcal{F}$ la classe des groupes finis. La classe $\mathscr{E}(\mathcal{A} \cup \mathcal{F})$, introduite par Day* [Da57, p. 520] *et notamment étudiée par Chou* [Ch80] *est appelée classe des groupes* élémentairement moyennables. *Soit $\mathcal{SE}$ la classe des groupes de type fini à croissance sous-exponentielle. La classe $\mathscr{E}(\mathcal{SE})$ est appelée classe des groupes* sous-exponentiellement moyennables. *On a $\mathcal{A} \cup \mathcal{F} \subset \mathcal{SE}$, si bien que $\mathscr{E}(\mathcal{A} \cup \mathcal{F}) \subset \mathscr{E}(\mathcal{SE})$.*

La classe des groupes moyennables est stable par passage aux extensions et aux limites directes, et contient les groupes à croissance sous-exponentielle, si bien que ces classes sont constituées de groupes moyennables (ce qui est l'unique justification de la terminologie !).

Une autre application du lemme A.1 est la suivante.

Fait A.4. — *Soit G un groupe de type fini élémentairement moyennable et infini. Alors G a virtuellement un morphisme surjectif sur $\mathbf{Z}$, au sens où il a un sous-groupe d'indice fini ayant un morphisme surjectif vers $\mathbf{Z}$. De manière équivalente, il possède un quotient infini et virtuellement abélien.*

Démonstration. — Montrons plus généralement que si $\mathcal{C}$ est une classe de groupes stable par passage aux sous-groupes et quotients telle que tout groupe infini dans $\mathcal{C}$ a virtuellement un morphisme surjectif sur $\mathbf{Z}$, alors il en est de même pour tout G infini de type fini dans $\mathscr{E}(\mathcal{C})$.

Supposons le contraire. Soit α minimal tel que $G \in \mathscr{E}_\alpha(\mathcal{C})$. Alors α n'est pas un ordinal limite et par hypothèse, $\alpha \neq 0$, donc $\alpha = \beta + 1$ est un successeur. Comme G est de type fini, il est donc extension à noyau N dans $\mathscr{E}_\beta(\mathcal{C})$ et quotient Q dans $\mathcal{C}$. Si Q est infini, alors il a virtuellement un morphisme surjectif sur $\mathbf{Z}$, et donc G aussi. Si Q est fini, alors N est d'indice fini, et par minimalité de α a virtuellement un morphisme surjectif sur $\mathbf{Z}$, et donc G aussi.

Pour la reformulation, il est clair que l'existence d'un quotient virtuellement abélien implique l'existence d'un sous-groupe d'indice fini avec un abélianisé infini ; la réciproque est vraie : si G admet un sous-groupe d'indice fini H d'abélianisé infini, alors si N est l'intersection des conjugués de $[H, H]$ dans G alors G/N est virtuellement abélien et infini. $\square$

APPENDICE B. AJOUT (FÉVRIER 2020)

(*En dehors des ajouts datés de février 2020 liés à cet appendice, la version coïncide avec celle envoyée à l'éditeur en mars 2013.)*

Stěpánek et Rubin (1989) [SR] ont introduit de façon générale le groupe plein-topologique d'un sous-groupe du groupe des autohoméomorphismes d'un espace compact totalement séparé. Ils se placent dans le cadre du groupe des automorphismes d'une algèbre booléenne, mais utilisent explicitement la dualité de Stone. Ils démontrent [SR, Lemma 5.17] : *Soit X un espace compact totalement séparé. Soit Γ un sous-groupe libre non trivial de* $\mathrm{Homeo}(X)$ *agissant topologiquement librement sur X. Alors $[\![\Gamma]\!]$ (noté* $\mathrm{PW}(\Gamma)$ *"elements piecewise in Γ") n'est pas simple.* Plus précisément, ils construisent un morphisme non nul $[\![\Gamma]\!] \to \mathbf{Z}$. En fait la preuve fonctionne en supposant seulement qu'il existe $x_0 \in X$ de stabilisateur trivial, et qu'il existe une partie M de Γ telle que pour tout $g \in \Gamma$ on ait $gM \triangle M$ fini et que de plus le morphisme $\Gamma \to \mathbf{Z}$, $g \mapsto |gM \smallsetminus M| - |M \smallsetminus gM|$ est non nul. En effet, ce morphisme se prolonge en un morphisme $[\![\Gamma]\!] \to \mathbf{Z}$ donné par $f \mapsto |fM' \smallsetminus M'| - |M' \smallsetminus fM'|$ avec $M' = Mx_0$. La construction au début du §3.3 est en fait un cas particulier de cette situation.

RÉFÉRENCES

[Ab06] M. Abert. Representing graphs by the non-commuting relation, Publ. Math. Debrecen 69/3 (2006), 261–269.

[BeM08] S. Bezuglyi, K. Medynets. Full groups, flip conjugacy, and orbit equivalence of Cantor minimal systems. Colloq. Math. 110(2) (2008), 409–429.

[BKN10] L. Bartholdi, V. Kaimanovich, V. Nekrashevych. On amenability of automata groups. Duke Math. J. 154(3) (2010), 575–598.

[Bo83] M. Boyle. Topological orbit equivalence and factor maps in symbolic dynamics. Ph.D. thesis, Univ. of Washington, 1983.

[BoTo98] M. Boyle, J. Tomiyama. Bounded topological orbit equivalence and C^*-algebras, J. Math. Soc. Japan 50(2) (1998), 317–329.

[Bou] N. Bourbaki. Topologie générale, chapitres 1 à 4. Hermann, Paris, 1971. Réimpression Springer, 2007.

[Bri09] J. Brieussel. Amenability and non-uniform growth of some directed automorphism groups of a rooted tree. Math. Z. 263(2) (2009), 265–293.

[Bro87] K. Brown. Finiteness properties of groups. In : Proceedings of the Northwestern Conference on Cohomology of Groups, Evanston, IL, 1985, J. Pure Appl. Algebra 44 (1987), 45–75.

[BV05] L. Bartholdi, B. Virág. Amenability via random walks. Duke Math. J. 130(1) (2005), 39–56.

[Ch80] C. Chou. Elementary amenable groups. Illinois J. Math. 24(3) (1980), 396–407.

[Da57] M. M. Day. Amenable semigroups. Illinois J. Math. Volume 1, Issue 4 (1957), 509–544.

[DFG11] F. Dahmani, K. Fujiwara, V. Guirardel. Free groups of interval exchange transformations are rare. ArXiv math/1101.5909v2 (2011), à paraître à Groups Geom. Dyn.

[Do90] E. van Douwen, Measures invariant under actions of F_2. Topology Appl. 34(1) (1990), 53–68.

[EM12] G. Elek, N. Monod. On the topological full group of minimal Cantor $\mathbf{Z}^2$-systems. ArXiv math/1201.0257v2 (2012) ; à paraître à Proc. Amer. Math. Soc.

[Ers06] A. Erschler. Piecewise automatic groups. Duke Math. J. 134(3) (2006), 591–613.

[Eym] P. Eymard. Initiation à la théorie des groupes moyennables. Pages 89–107 dans : Analyse harmonique sur les groupes de Lie. Lecture Notes in Math. 497, Springer (1975).

[GlW95] E. Glasner, B. Weiss. Weak orbit equivalence of Cantor minimal systems, Internat. J. Math. 6(4) (1995), 559–579.

[GPS95] T. Giordano, I. F. Putnam, C. F. Skau. Topological orbit equivalence and C^*-crossed products, J. Reine Angew. Math. 469 (1995), 51–111.

[GPS99] T. Giordano, I. F. Putnam, C. F. Skau. Full groups of Cantor minimal systems. Israel J. Math. 111 (1999), 285–320.

[Gre] F. Greenleaf. Invariant means on topological groups and their applications. New York, Van Nostrand, 1969.

[Gri84] R. Grigorchuk. Degrees of growth of finitely generated groups, and the theory of invariant means. Izvestiya : Mathematics, 25(2) :259–300, 1985. Russian original : Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 48(5) (1984), 939–985.

[GrMe12] R. Grigorchuk, K. Medynets. On algebraic properties of topological full groups. ArXiv math/1105.0719v4 (2012).

[GrZu02] R. Grigorchuk, A. Zuk. On a torsion-free weakly branch group defined by a three state automaton. Int. J. Algebra Comput. 12 (2002), 223–246.

[GTY10] E. Guentner, R. Tessera, G. Yu. A notion of geometric complexity and its applications to topological rigidity. ArXiv math/1008.0884v1 (2010), à paraître à Inv. Math.

[HS86] P. de la Harpe, G. Skandalis. Un résultat de Tarski sur les actions moyennables de groupes et les partitions paradoxales. Enseign. Math., II. Sér. 32 (1986), 121–138.

[Hou78] C. Houghton, The first cohomology of a group with permutation module coefficients, Arch. Math. (Basel) 31(3) (1978), 254–258.

[JM12] K. Juschenko, N. Monod. Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups. ArXiv math/1204.2132v3, à paraître à Ann. of Math.

[Kai05] V. Kaimanovich. “Münchhausen trick” and amenability of self-similar groups. Internat. J. Algebra Comput. 15 (2005), 907–937.

[Kea75] M. Keane. Interval exchange transformations. Math. Z. 141(1) (1975), 25–31.

[KH] A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 54, Cambridge University Press, 1995.

[Kri80] W. Krieger. On a dimension for a class of homeomorphism groups. Math. Ann. 252 (1980), 87–95.

[Luk] J. Lukes. Integral representation theory : applications to convexity, Banach spaces and potential theory. Walter de Gruyter, 2010.

[Ma06] H. Matui. Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems. Internat. J. Math. 17(2) 231–251, 2006.

[Ma12] H. Matui. Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems II. ArXiv math/1111.3134v1, à paraître à Ergodic Th. Dynam. Systems.

[MH38] M. Morse, G. Hedlund. Symbolic Dynamics. Amer. J. Math. 60(4) (1938), 815–866.

[Neu37] B. H. Neumann. Some remarks on infinite groups. Proc. London Math. Soc. (2), 12 (1937), 120–127.

[Nov09] C. F. Novak. Discontinuity-growth of interval-exchange maps. J. Mod. Dyn. 3(3) (2009), 379–405.

[Pat] A. Paterson. Amenability. Math. Surveys Monogr. Amer. Math. Soc., 1988.

[Pu89] I. F. Putnam. The C^*-algebras associated with minimal homeomorphisms of the Cantor set. Pacific J. Math. Volume 136, Number 2 (1989), 329–353.

[Ros74] J. Rosenblatt. Invariant measures and growth conditions. Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1974), 33–53 .

[Sab74] G. Sabbagh. Caractérisation algébrique des groupes de type fini ayant un problème du mot résoluble (théorème de Boone-Higman, travaux de B. H. Neumann et MacIntyre). Séminaire N. Bourbaki 1974-1975, exp. n°457, Lecture Notes in Math. 514 (1976), 61–80.

[Sag97] M. Sageev. Codimension-1 subgroups and splittings of groups, J. of Algebra 189 (1997), 377–389.

[Sch27] O. Schreier. Die Untergruppen der freien Gruppen. Abhandlungen Math. Hamburg 5 (1927), 161–183.

[Sk97] C. F. Skau. Orbit structure of topological dynamical systems and its invariants, Operator Algebras and Quantum Field Theory, Rome (1996) (International Press, Cambridge, MA, 1997), 533–544.

[SR] P. Stěpánek, M. Rubin. Homogeneous Boolean algebras. Handbook of Boolean algebras, Vol. 2, 679–715, North-Holland, Amsterdam, 1989. *(Référence ajoutée, février 2020)*

[SS] L. Steen, J. Seebach. Counterexamples in topology. Dover Publications, New York, 1978.

[St84] A. Stëpin. A remark on the approximability of groups. (En russe) Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1984, 85–87. Traduction anglaise : Moscow Univ. Math. Bull. 39 (1984), 90–93.

[Ve81] A. Vershik. Uniform algebraic approximations of shift and multiplication operators. Dokl. Akad. Nauk SSSR 259(3), 526–529 (1981). Traduction anglaise : Sov. Math. Dokl. 24 (1981), 97–100.

[Ve82] A. Vershik. A theorem on periodical Markov approximation in ergodic theory. Zapiski Nauchn. Semin. LOMI 115 (1982), 72–82 . Traduction anglaise : J. Sov. Math. 28 (1985), 667–674. Autre traduction anglaise dans "Ergodic theory and related topics" (Vitte, 1981). Math. Res. 12 (1982), 195–206. Akademie-Verlag, Berlin.

Yves de CORNULIER

CNRS – Université Paris-Sud 11
Département de Mathématiques
UMR 8628 du CNRS
Bâtiment 425
91405 Orsay Cedex
E-mail : `yves.cornulier@math.u-psud.fr`