

feuille-exercices-5

December 4, 2023

1 Exercices - EDP

1.1 Schema d'Euler explicite pour l'équation de Black-Scholes pour les produits dérivés

On considère une action dont le prix est $S \in [0, S_{max}]$ au cours du temps t (la notation S est pour "Stock"). On s'intéresse à une option financière européenne de type call sur cette action, dont le prix d'exercice est $C \in (0, S_{max})$ et le temps d'échéance est $T_{max} > 0$. C'est-à-dire, cette option est un contrat qui donne le droit d'acheter au temps T_{max} l'action au prix C fixé à l'avance.

Soit $V(S, t)$ la valeur de cette option pour un temps t et un prix S de l'action. Au temps T_{max} , si $S \geq C$ en utilisant son droit d'acheter l'action au prix C on gagne $S - C$, et si $S < C$ il vaut mieux ne pas utiliser son droit d'acheter l'action au prix C et on gagne 0. La valeur de l'option au temps T_{max} est donc

$$V(S, T_{max}) = \max(S - C, 0)$$

Si $S = 0$ l'option a une valeur nulle

$$V(S, t) = 0$$

pour $t < T_{max}$.

L'équation de Black-Scholes est un modèle théorique pour déterminer quelle serait la valeur $V(S, t)$ de cette option pour un temps $t < T_{max}$ et un prix S de l'action. Elle s'écrit :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} V + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} V + rS \frac{\partial}{\partial S} V - rV = 0 & \text{pour } (S, t) \in (0, S_{max}) \times (-\infty, T_{max}) \\ V(0, t) = 0 & \text{pour } t < T_{max} \\ V(S_{max}, t) = S_{max} - C & \text{pour } t < T_{max} \\ V(S, T_{max}) = \max(S - C, 0) & \end{cases}$$

où $r > 0$ est le taux d'intérêt sans risque et $\sigma > 0$ est la volatilité de l'action. Deux conditions au bord ont déjà été expliquées, et la troisième $V(S_{max}, t) = S_{max} - C$ est une simplification faite pour cet exercice.

1.1.1 Changement d'inconnue pour obtenir une équation de diffusion

On pose $U(S, \tau) = V(S, T_{max} - \tau)$.

1. Montrer à la main que $V \in C^2([0, S_{max}] \times (-\infty, T_{max})) \cap C([0, S_{max}] \times (-\infty, T_{max}))$ et résout (1) si et seulement si $U \in C^2([0, S_{max}] \times (0, \infty)) \cap C([0, S_{max}] \times (0, \infty))$ et résout

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} U - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} U - rS \frac{\partial}{\partial S} U + rU = 0 & \text{pour } (S, \tau) \in (0, S_{max}) \times (0, \infty), \\ U(0, \tau) = 0 & \text{pour } \tau > 0, \\ U(S_{max}, \tau) = S_{max} - C & \text{pour } \tau > 0, \\ U(S, 0) = \max(S - C, 0) & \text{pour } S \in (0, S_{max}). \end{cases}$$

(Remarque : l'équation (2) est "standard" car c'est une équation de diffusion dont la quatrième égalité spécifie la donnée à l'instant initial 0. L'équation (1) est "moins standard" car c'est une équation de diffusion rétrograde dont la quatrième égalité spécifie la donnée à l'instant final T . C'est pourquoi nous avons choisie d'effectuer le changement d'inconnue $V \mapsto U$.)

1.1.2 Effet du terme d'ordre 0 (réaction)

On souhaite d'abord étudier l'effet du dernier terme dans (2), on étudie donc l'équation

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} U + rU = 0 & \text{pour } (S, \tau) \in [0, S_{max}] \times [0, \infty) \\ U(S, 0) = \max(S - C, 0) & \text{pour } S \in (0, S_{max}) \end{cases}$$

Le terme qu'on a pris en compte est rU , qui n'implique pas de dérivée sur U et affecte seulement la valeur de U point par point. Un tel terme en EDP est appelé terme de "réaction".

On cherche à trouver numériquement la solution au temps $T > 0$ en utilisant une méthode aux différences finies. Pour deux entiers $N, K \geq 1$ on utilise la discrétisation suivante : $S_n = n\Delta S$ pour $n = 0, \dots, N$ avec $\Delta S = \frac{S_{max}}{N}$ et $\tau_k = k\Delta t$ pour $k = 0, \dots, K$ avec $\Delta t = \frac{T}{K}$. On remarque que les indices sont tels que

$$S_0 = 0, \quad S_N = S_{max}, \quad \tau_0 = 0, \quad \text{et} \quad \tau_K = T.$$

On va chercher à approximer

$$U(S_n, \tau_k) \approx u_{n,k}.$$

On utilise pour la première équation de (3) le schémat d'Euler explicite

$$\frac{u_{n,k+1} - u_{n,k}}{\Delta t} = -ru_{n,k}.$$

La seconde équation de (3) donne quant à elle :

$$u_{n,0} = \max(n\Delta S - C, 0)$$

En combinant, on obtient que le vecteur $(u_{0,k}, \dots, u_{N,k})$ est donné initialement par

$$(4) \quad \begin{pmatrix} u_{0,0} \\ \vdots \\ u_{N,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0\Delta S - C, 0) \\ \vdots \\ \max(N\Delta S - C, 0) \end{pmatrix}$$

puis se calcule par itérations

$$(5) \quad \begin{pmatrix} u_{0,k+1} \\ \vdots \\ u_{N,k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{0,k} \\ \vdots \\ u_{N,k} \end{pmatrix},$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 - r\Delta t & (0) \\ (0) & 1 - r\Delta t \end{pmatrix}.$$

1. Écrire une fonction $\text{BSO}(C, S_{max}, r, T, K, N)$ qui prend en entrée quatre constantes $S_{max} > C > 0$ et $r, T > 0$, et deux entiers $K, N \geq 1$ et renvoie le vecteur $(u_{0,K}, \dots, u_{N,K})$ obtenu à partir de (4) et (5).
2. On choisit $r = 0.3$, $C = 5$ et $S_{max} = 20$. En prenant N et K assez grands, et $T = 1, 3, 10$ représenter graphiquement ces approximations de $U(\cdot, 1)$, $U(\cdot, 3)$ et $U(\cdot, 10)$. Représenter sur le même graphique la donnée initiale $U(\cdot, 0)$.
3. Qu'observez-vous lorsque le temps τ s'écoule ? Montrer à la main que l'unique solution $U \in C^1([0, S_{max}] \times [0, +\infty))$ de (3) est $U(S, \tau) = \max(S - C, 0)e^{-r\tau}$. Proposer en conséquence une explication à votre observation.

1.1.3 Effet du terme d'ordre 1 (convection)

On souhaite maintenant étudier l'effet de l'avant dernier terme dans (2), on étudie donc l'équation

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} U - rS \frac{\partial}{\partial S} U = 0 & \text{pour } (S, \tau) \in [0, S_{max}] \times [0, \infty) \\ U(S_{max}, \tau) = S_{max} - C & \text{pour } \tau > 0 \\ U(S, 0) = \max(S - C, 0) & \text{pour } S \in (0, S_{max}). \end{cases}$$

Le terme qu'on a pris en compte est $-rS \frac{\partial}{\partial S} U$, qui implique une dérivée sur U et transporte les valeurs de U (voir dernière section pour une explication théorique). Un tel terme en EDP est appelé terme de "convection". La vitesse de ce transport est $-rS$ ce qui occasionne un déplacement vers la gauche. En $S = S_{max}$ on a donc un flux entrant dans l'intervalle $[0, S_{max}]$. C'est pourquoi la deuxième équation $U(S_{max}, \tau) = S_{max} - C$ prescrit la valeur "entrante" de la solution.

On approxime la dérivée par rapport à S par une discrétisation en amont

$$\frac{\partial}{\partial S} U(S_n, t_k) \approx \frac{u_{n,k+1} - u_{n,k}}{\Delta S}.$$

On choisit celle-ci plutôt que la discrétisation en aval $\frac{\partial}{\partial S} U(S_n, t_k) \approx \frac{u_{n,k} - u_{n,k-1}}{\Delta S}$ car le transport déplace la solution vers la gauche (en particulier, elle est plus pratique pour tenir compte des conditions au bord).

Le schéma d'Euler explicite pour (6) devient alors

$$\frac{u_{n,k+1} - u_{n,k}}{\Delta t} - rS_n \frac{u_{n+1,k} - u_{n,k}}{\Delta S} = 0$$

avec

$$u_{n,0} = \max(n\Delta S - C, 0)$$

et

$$(7) \quad u_{N,k} = S_{max} - C.$$

En combinant, on obtient que le vecteur $(u_{0,k}, \dots, u_{N-1,k})$ est donné initialement par

$$(8) \quad \begin{pmatrix} u_{0,0} \\ \cdot \\ u_{N-1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(0, \Delta S - C, 0) \\ \cdot \\ \max((N-1)\Delta S, 0) \end{pmatrix}$$

puis se calcule par itérations

$$(9) \quad \begin{pmatrix} u_{0,k+1} \\ \cdot \\ u_{N-1,k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{0,k} \\ \cdot \\ u_{N-1,k} \end{pmatrix} + F,$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ \cdot & \cdot \\ (0) & 1 \end{pmatrix} + r \frac{\Delta t}{\Delta S} \begin{pmatrix} -S_0 & S_0 & (0) \\ & -S_1 & S_1 \\ (0) & & -S_{N-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} (0) \\ \cdot \\ r \frac{\Delta t}{\Delta S} S_{N-1} (S_{max} - C) \end{pmatrix}.$$

1. Écrire une fonction `BS1(C, Smax, r, T, K, N)` qui prend en entrée quatre constantes $S_{max} > C > 0$ et $r, T > 0$, et deux entiers $K, N \geq 1$ et renvoie le vecteur $(u_{0,K}, \dots, u_{N,K})$ obtenu par (7), (8) et (9).

2. On prend $r = 0.3$, $C = 5$ et $S_{max} = 20$. En prenant $N = 100$ et $K = 300$, représenter graphiquement les approximations de $U(\cdot, 0)$, $U(\cdot, 1)$, $U(\cdot, 3)$ et $U(\cdot, 10)$.

3. Qu'observez-vous lorsque le temps τ s'écoule ?

3bis (facultatif) Résoudre à la main (6) en utilisant la méthode des équations caractéristiques. Proposer alors une explication à ce que vous avez observé à la question **3**.

4. La condition (CFL) pour l'équation de transport (6) est que

$$\frac{\Delta t}{\Delta s} \max_{0, S_{max}} (rS) = \frac{\Delta t}{\Delta s} r S_{max} < C_{max}$$

où C_{max} est une certaine constante qui dépend de l'équation et du type de schéma. Comme à la question 2, représenter l'approximation de $U(\cdot, 1)$, mais pour $N = 100$ et $K = 30$, puis pour $N = 100$ et $K = 24$, et enfin pour $N = 100$ et $K = 20$. Que constatez vous ? Expliquer ce phénomène d'instabilité du schéma numérique à l'aide de la notion de condition (CFL).

1.1.4 Effet du terme d'ordre 2 (Diffusion)

On souhaite maintenant étudier l'effet du second terme dans (2), on étudie donc l'équation

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \tau} U - \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} U = 0 & \text{pour } (S, \tau) \in [0, S_{max}] \times [0, \infty) \\ U(0, \tau) = 0 & \text{pour } \tau \in (0, T] \\ U(S_{max}, \tau) = S_{max} - C & \text{pour } \tau \in (0, T] \\ U(S, 0) = \max(S - C, 0) & \text{pour } S \in (0, S_{max}). \end{cases}$$

Cette équation ressemble théoriquement à l'équation de la chaleur car c'est une équation de diffusion mais avec un coefficient de diffusion $\frac{1}{2} \sigma^2 S^2$ non constant. La deuxième et la troisième équation prescrivent les valeurs "entrantes" de la solution au bord.

Le schéma aux différences finies d'Euler explicite pour (10) s'écrit

$$\frac{u_{n,k+1} - u_{n,k}}{\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2} S_n^2 \frac{u_{n+1,k} - 2u_{n,k} + u_{n-1,k}}{(\Delta S)^2} = 0$$

avec

$$(11) \quad u_{0,k} = 0$$

et

$$u_{n,0} = \max(n\Delta S - C, 0)$$

et

$$(12) \quad u_{N,k} = S_{max} - C.$$

En combinant, on obtient que le vecteur $(u_{1,k}, \dots, u_{N-1,k})$ est donné initialement par

$$(13) \quad \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ \vdots \\ u_{N-1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(1\Delta S - C, 0) \\ \vdots \\ \max((N-1)\Delta S - C, 0) \end{pmatrix}$$

puis se calcule itérativement par

$$(14) \quad \begin{pmatrix} u_{1,k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1,k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ \vdots \\ u_{N-1,k} \end{pmatrix} + F,$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} \begin{pmatrix} -2S_1^2 & S_1^2 & & & (0) \\ S_2^2 & -2S_2^2 & S_2^2 & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ (0) & & & S_{N-2}^2 & \\ & & & S_{N-1}^2 & -2S_{N-1}^2 \end{pmatrix}, \quad F = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ S_{N-1}^2(S_{max} - C) \end{pmatrix}$$

1. Écrire une fonction `BS2(C, Smax, sigma, T, K, N)` qui prend en entrée quatre constantes $S_{max} > C > 0$ et $\sigma, T > 0$, et deux entiers $K, N \geq 1$ et renvoie le vecteur $(u_{0,K}, \dots, u_{N,K})$ obtenu par (11), (12), (13) et (14).

2. En prenant $N = 100$ et $K = 30000$, représenter graphiquement ces approximations de $U(\cdot, 0)$, $U(\cdot, 1)$, $U(\cdot, 3)$ et $U(\cdot, 10)$ pour $\sigma = 0.5$, $C = 5$ et $S_{max} = 20$.

3. Qu'observez-vous lorsque le temps τ s'écoule ?

1.1.5 Simulation de l'équation complète

On souhaite maintenant intégrer tous les termes de l'équation (2) dans notre schéma numérique. Les trois effets observés chaun séparément dans les sections précédentes vont maintenant se produire simultanément. L'équation (2) entre en EDP dans la catégorie générale des équations de diffusion-convection-réaction.

Le schéma aux différences finies d'Euler explicite pour (2) est

$$\frac{u_{n,k+1} - u_{n,k}}{\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2} S_n^2 \frac{u_{n+1,k} - 2u_{n,k} + u_{n-1,k}}{(\Delta S)^2} - r S_n \frac{u_{n+1,k} - u_{n,k}}{\Delta S} + r u_{n,k} = 0$$

avec

$$(15) \quad u_{0,k} = 0$$

et

$$u_{n,0} = \max(n\Delta S - C, 0)$$

et

$$(16) \quad u_{N,k} = S_{max} - C$$

En combinant, on obtient que le vecteur $(u_{1,k}, \dots, u_{N-1,k})$ est donné initialement par

$$(17) \quad \begin{pmatrix} u_{1,0} \\ \vdots \\ u_{N-1,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(1\Delta S - C, 0) \\ \vdots \\ \max((N-1)\Delta S - C, 0) \end{pmatrix}$$

puis se calcule itérativement par

$$(18) \quad \begin{pmatrix} u_{1,k+1} \\ \vdots \\ u_{N-1,k+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{1,k} \\ \vdots \\ u_{N-1,k} \end{pmatrix} + F,$$

avec

$$M = \begin{pmatrix} 1-r\Delta t & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1-r\Delta t \end{pmatrix} + r \frac{\Delta t}{\Delta S} \begin{pmatrix} -S_1 & S_1 & & (0) \\ & -S_2 & S_2 & \\ & & & \\ (0) & & & -S_{N-1} \end{pmatrix} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} \begin{pmatrix} -2S_1^2 & S_1^2 & & \\ S_2^2 & -2S_2^2 & S_2^2 & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & & S_{N-1}^2 & -2S_{N-1}^2 \end{pmatrix}$$

$$F = r \frac{\Delta t}{\Delta S} \begin{pmatrix} (0) \\ \vdots \\ S_{N-1}(S_{max} - C) \end{pmatrix} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ S_{N-1}^2(S_{max} - C) \end{pmatrix}.$$

1. Écrire une fonction `BS(C, Smax, r, sigma, T, K, N)` qui prend en entrée cinq constantes $S_{max} > C > 0$ et $r, \sigma, T > 0$, et deux entiers $K, N \geq 1$ et renvoie le vecteur $(u_{0,K}, \dots, u_{N,K})$ obtenu par (15), (16), (17) et (18).

2. Pour $\tau = T$, on approxime la fonction $S \mapsto U(S, T)$ par la fonction qui vaut $u_{n,k}$ en chaque $S = S_n$ pour $n = 0, \dots, N$ et qui en fait l'interpolation linéaire sur (S_n, S_{n+1}) . En prenant $N = 100$ et $K = 30000$, représenter graphiquement ces approximations de $U(\cdot, 0)$, $U(\cdot, 1)$, $U(\cdot, 3)$ et $U(\cdot, 10)$ pour $r = 0.3$, $\sigma = 0.5$, $C = 5$ et $S_{max} = 20$.

3. Qu'observez-vous lorsque le temps τ s'écoule ?

[]: