feuille-exercices-3

November 3, 2023

1 Exercice - Optimisation

On considère une corde tendue attachée à ses deux extrémités en x=0 et x=1. On suspend une charge à une position a à cette corde. L'objectif est de trouver une position a^* pour cette charge de sorte que la force exercée sur les points d'attache soit la plus faible possible afin d'éviter leur rupture. Pour cela, on va : - Proposer un modèle pour la position de la corde (partie I) - Calculer, à l'aide de ce modèle, la position de la corde pour une charge en position a (partie II) - Calculer l'énergie de rupture $R(a)$ de la corde, quantité mesurant le risque de rupture due aux forces exercées sur les extrémités (partie III) - Trouver la meilleure position a^*, c'est-à-dire celle qui minimise $R(a)$, à l'aide d'un algorithme de minimisation (partie IV).

1.1 I Modèle et questions préliminaires

Les abscisses sont décrites par $x \in (0,1)$ et $x \mapsto u(x)$ représente le déplacement vertical en x de la corde lorsque la charge est suspendue, par rapport à sa position au repos. Le champ de forces exercé sur la corde par le poids de la charge en position a est représenté par une densité linéique $f_a : [0,1] \to \mathbb{R}$.

D'abord on représente le poids de la charge par la fonction p suivante :

$$(1) \qquad p(x) = \begin{cases} -\cos^2(2\pi x) & \text{si } -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Le signe $-$ correspond à l'orientation usuelle de la gravité "vers le bas". (Remarque : une charge différente aurait donné une autre fonction p)

I.1. Coder une fonction `p(x)` qui prend en entrée un nombre réel x et renvoie $p(x)$ définie par (1). Représenter graphiquement la fonction p sur l'intervalle $[-1,1]$.

Ensuite, on repère par $a \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ la position du centre de la charge. Cela revient à dire que la corde est soumise au champ de force f^a défini par:

$$(2) \qquad f^a(x) = p(x-a).$$

I.2. En vous aidant de votre réponse à la question **I.1.** Coder une fonction `f(a,x)` qui prend en entrée deux nombres réels a et x et renvoie $f^a(x)$ définie par (2). Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto f^{2/3}(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$.

Pour une charge placée en position $a \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, on notera u^a la position verticale de la corde correspondante. On supposera que la corde est fixée à ses extrémités, ce que l'on traduit par les conditions $u^a(0) = u^a(1) = 0$. Après des considérations physiques que l'on ne détaillera pas ici, on trouve que la position verticale de la corde u^a vérifie l'équation:

$$(3) \qquad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u^a}{\partial x}(x)\right) = f^a(x), & \forall x \in (0,1), \\ u^a(0) = u^a(1) = 0. \end{cases}$$

où $k(x)$ est appelée le coefficient de raideur de la corde au point x. On supposera k connu (car il peut être mesuré expérimentalement). On prendra pour cet exercice :

$$(4) \qquad k(x) = 1 + x + 0.8\sin(10x).$$

I.3. Coder une fonction `k(x)` qui prend en entrée un réel x et renvoie $k(x)$ donnée par (4). Représenter graphiquement la fonction k sur l'intervalle $[0,1]$.

On admet le résultat suivant, qui nous assure qu'il existe bien une solution de (3) et que celle-ci est unique. (Vous pouvez essayer, en exercice facultatif, de le démontrer à l'aide de vos connaissances apprises dans les autres cours de M1 et M2) :

Théorème 1. Soient $f^a \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $k \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\min_{x\in[0,1]} k(x) > 0$. Alors il existe une unique fonction $u^a \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que u^a est solution de (3).

1.2 II Calcul de la position de la corde

Pour tout paramètre $a \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ on utilise une méthode de différences finies (qui sera vue dans ce cours avec plus de détails plus tard) pour calculer la solution u^a de l'équation (3). Plus précisément, pour un entier N fixé on pose $h = \frac{1}{N+1}$ le pas de discretisation, et $x_i = (i+1)h$ pour $i \in \{-1, ..., N\}$. On a en particulier que $x_{-1} = 0$ et $x_N = 1$ sont les extrémités, et que $(x_i)_{-1\leq i\leq N}$ sont des points équirépartis sur l'intervalle $[0,1]$ à distance h. On cherche une approximation u_i^a de la valeur de u^a au point x_i, définie par le schéma :

$$(5) \qquad \begin{cases} u_{-1}^a = u_N^a = 0, \\ -\frac{1}{h^2}\left(k_{i+1/2}(u_{i+1}^a - u_i^a) - k_{i-1/2}(u_i^a - u_{i-1}^a)\right) = f^a(x_i) \end{cases}$$

avec $k_{i+1/2} = k((i+\frac{3}{2})h)$ pour $i \in \{0, ..., N\}$. Le vecteur des valeurs approchées en $x_0, ..., x_{N-1}$ est $U^a = (u_0^a, ..., u_{N-1}^a)^T \in \mathbb{R}^N$. Il s'obtient donc par la résolution du système linéaire suivant :

$$(6) \qquad MU^a = F^a$$

avec

$$(7) \qquad F^a = (f^a(x_0), ..., f^a(x_{N-1}))^T$$

et $M = (m_{i,j})_{0\leq i,j\leq N-1}$ où :

$$(8) \qquad \begin{cases} m_{i,j} = 0 & \text{pour tout } (i,j) \in \{0, ..., N-1\}^2 \text{ tel que } |i-j| > 1, \\ m_{i,i+1} = -\frac{k_{i+1/2}}{h^2} & \text{pour tout } i \in \{0, ..., N-2\}, \\ m_{i,i-1} = -\frac{k_{i-1/2}}{h^2} & \text{pour tout } i \in \{1, ..., N-1\}, \\ m_{i,i} = \frac{k_{i+1/2}+k_{i-1/2}}{h^2} & \text{pour tout } i \in \{0, ..., N-1\}. \end{cases}$$

II.0. (Question facultative, vous n'êtes pas obligés de la traiter) Montrer, en utilisant l'expansion de Taylor à l'ordre 3 d'une fonction près d'un point, que si $u \in C^4([0,1],\mathbb{R})$ et $k \in C^3([0,1],\mathbb{R})$ alors:

$$-\frac{1}{h^2}\left(k_{i+1/2}(u^a_{i+1}-u^a_i) - k_{i-1/2}(u^a_i - u^a_{i-1})\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)(x_i) + O(h^2).$$

Interprétation : L'identité ci-dessus explique le choix du système (5) pour calculer u^a de manière approchée.

II.1. En vous aidant de votre réponse à la question **I.2.** Coder une fonction `F(N,a)` qui prend en entrée un entier $N \geq 1$ et un nombre réel a et renvoie le vecteur F^a défini par (7).

II.2. En vous aidant de votre réponse à la question **I.3.** Coder une fonction `M(N)` qui prend en entrée un entier $N \geq 1$ et qui renvoie la matrice $M = (m_{i,j})_{0\leq i,j\leq N-1}$ définie par (8).

Indication : vérifiez que

$$M(2) = \begin{pmatrix} 24.26268252 & -6.59574522 \\ -6.59574522 & 29.4842628 \end{pmatrix}$$

II.3. En vous aidant de vos réponses aux questions **II.1.** et **II.2.**, coder une fonction `U(N,a)` qui prend en entrée un entier $N \geq 1$ et un nombre réel $a \in [1/4, 3/4]$ et renvoie la solution U^a de (6). Vous pourrez, par exemple, vous aider de `numpy.linalg.solve` pour résoudre ce système linéaire.

Utiliser cette fonction `U(N,a)` pour représenter graphiquement la solution u^a de (6) pour $a = \frac{1}{2}$ sur $[0,1]$.

1.3 III Calcul de l'énergie de rupture.

L'énergie de rupture de la corde, pour une charge en position $a \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, est la quantité

$$R(a) = \frac{1}{2}\left|k(0)\frac{\partial u^a}{\partial x}(0)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|k(1)\frac{\partial u^a}{\partial x}(1)\right|^2. \tag{9}$$

La position optimale a^* de la charge est alors celle qui minimise l'énergie de rupture :

$$R(a^*) = \min_{a\in[1/4,3/4]} R(a). \tag{10}$$

Pour un entier $N \geq 1$ nous avons approximé numériquement la position de la corde en calculant le vecteur $(u^a_{-1}, u^a_0, ..., u^a_{N-1}, u^a_N)$ dans la partie II. On approxime alors $\frac{\partial u^a}{\partial x}(0)$ par $\frac{u^a(x_0)-u_a(x_{-1})}{h}$ et $\frac{\partial u^a}{\partial x}(1)$ par $\frac{u^a(x_N)-u_a(x_{N-1})}{h}$. L'énergie de rupture approchée correspondante est :

$$\begin{aligned} R_N(a) &= \frac{1}{2}\left|k(0)\frac{u^a_0 - u^a_{-1}}{h}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|k(1)\frac{u^a_N - u^a_{N-1}}{h}\right|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left|k(0)\frac{u^a_0}{h}\right|^2 + \frac{1}{2}\left|k(1)\frac{u^a_{N-1}}{h}\right|^2 \end{aligned} \tag{11}$$

où l'on a utilisé $u^a_{-1} = u^a_N = 0$ pour la deuxième ligne.

III.1. Envous aidant de votre réponse à la question **II.3.**, coder `R(N,a)` une fonction qui prend en entrée un entier $N \geq 1$ et un nombre réel $a \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ et renvoie le nombre $R_N(a)$ donné par (11).

III.2. En vous aidant de votre réponse à la question **III.1.** Représenter la fonction $a \mapsto R_N(a)$ sur l'intervalle $[1/4, 3/4]$ pour un N assez grand. Pour quelle valeur approximative de a la fonction R_N semble-t-elle atteindre son minimum ?

1.4 IV Minimisation de l'énergie de rupture.

On admet le résultat suivant, qui stipule que la solution u^a de (3) est différentiable par rapport à la variable a.

Théorème 2. Sous les hypothèses du Théorème 1, on suppose de plus que $(a,x) \mapsto f^a(x) \in C^1([\frac{1}{4},\frac{3}{4}] \times [0,1]), \mathbb{R})$, et on note

$$g^a(x) = \frac{\partial f^a}{\partial a}(x).$$

Soit u^a l'unique solution de (3) donnée par le Théorème 1. Alors la fonction $a \mapsto u^a$ appartient à $C^1([\frac{1}{4},\frac{3}{4}], C^2([0,1],\mathbb{R}))$. De plus, en notant

$$v^a(x) = \frac{\partial u^a}{\partial a}(x),$$

on a pour tout $a \in [\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ que $v^a \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ et que v^a est solution de :

$$(12) \qquad \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial v^a}{\partial x}(x)\right) = g^a(x), & \forall x \in (0,1), \\ v^a(0) = v^a(1) = 0. \end{cases}$$

Grâce au théorème 2, on sait désormais que $a \mapsto R(a)$ donné par (9) est une fonction de classe C^1 et que :

$$R'(a) = (k(0))^2 \frac{\partial u^a}{\partial x}(0)\frac{\partial v^a}{\partial x}(0) + (k(1))^2 \frac{\partial u^a}{\partial x}(1)\frac{\partial v^a}{\partial x}(1).$$

On va maintenant calculer $R'(a)$ numériquement. On implémente la même méthode que dans la partie II. On décompose l'intervalle $[0,1]$ en les points $x_i = (i+1)h = \frac{i+1}{N+1}$ pour $i = -1, ..., N$. On calcule une solution approchée de l'équation (12) $V^a = (v_0^a, ..., v_{N-1}^a)$, où v_i^a est une approximation de $v^a(x_i)$, en résolvant :

$$(13) \qquad MV^a = G^a$$

où M est donnée par (6) et

$$(14) \qquad G^a = (g_a(x_0), ..., g_a(x_{N-1})).$$

On approche alors $R'(a)$ par :

$$(15) \qquad \begin{aligned} R'_N(a) &= (k(0))^2 \frac{u_0^a - u_{-1}^a}{h}\frac{v_0^a - v_{-1}^a}{h} + (k(1))^2 \frac{u_N^a - u_{N-1}^a}{h}\frac{v_N^a - v_{N-1}^a}{h} \\ &= (k(0))^2 \frac{u_0^a v_0^a}{h^2} + (k(1))^2 \frac{u_{N-1}^a v_{N-1}^a}{h^2} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $u_{-1}^a = u_N^a = v_{-1}^a = v_N^a = 0$ pour la seconde ligne.

IV.1. Coder une fonction `pprime(x)` qui prend en entrée un nombre réel x et renvoie

$$\frac{\partial p}{\partial x}(x) = \begin{cases} 4\pi\cos(2\pi x)\sin(2\pi x) & \text{si } -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Représenter graphiquement la fonction p' sur l'intervalle $[-1,1]$.

IV.2. En vous aidant de votre réponse à la question **IV.1.**, coder une fonction `g(a,x)` qui prend en entrée deux nombres réels a et x et renvoie $g_a(x) = \frac{\partial}{\partial a}(f_a(x)) = -\frac{\partial}{\partial x}p(x-a)$. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \frac{\partial}{\partial a}f^{2/3}(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$.

IV.3. En vous aidant de votre réponse à la question **IV.2.**, coder une fonction `G(N,a)` qui prend en entrée un entier $N \geq 1$ et un nombre réel a et renvoie le vecteur G^a défini par (14).

IV.4. En vous aidant de votre réponse aux questions **II.2.** et **IV.3.**, coder une fonction `V(N,a)` qui prend en entrée un entier $N \geq 1$ et un nombre réel $a \in [1/4, 3/4]$ et renvoie la solution V^a de (13).

IV.5. En vous aidant de vos réponses aux questions **II.3.** et **IV.4.**, coder une fonction `Rprime(N,a)` une fonction qui prend en entrée un entier $N \geq 1$ et un nombre réel $a \in [1/4, 3/4]$ et renvoie le nombre $R'_N(a)$ donné par (15).

Pour trouver la position optimale a^* de la charge, on approxime pour $N \geq 1$ le problème de minimisation (10) par:

$$(16) \qquad R_N(a^*) = \min_{a \in [1/4,3/4]} R_N(a).$$

On applique alors l'algorithme de minimisation du gradient à pas constant pour résoudre (16). Pour un pas constant $\rho > 0$ et une position initiale $a^0 \in (1/4, 3/4)$, on définit itérativement la suite minimisante comme suit :

- Initiation : $a_0 = a^0$
- Itération : $a_{k+1} = a_k - \rho R'_N(a_k)$ où $R'_N(a_k)$ est donné par (15).

IV.6. En utilisant votre réponse à la question **IV.5.**, écrire une fonction `minimiseurR(a0,rho,ep0,N,K)` qui prend en entrée un nombre $a^0 \in (1/4, 3/4)$, un pas $\rho > 0$, un seuil d'erreur ϵ^0, deux entiers $N, K \geq 1$ et qui applique l'algorithme de minimisation à pas constant pour trouver la solution du problème de minimisation (16). Plus précisément, `minimiseurR` calcule itérativement $a_0, a_1, ..., a_k$ définis ci-dessus, et s'arrête soit lorsque $|a_k - a_{k-1}| \leq \epsilon^0$ et renvoie la valeur a_k, soit lorsque $k = K$ et renvoie le message "l'algorithme n'a pas convergé".

IV.7. En utilisant votre réponse à la question **IV.7.**, trouver une valeur approchée de la position optimale a^* de la charge.

[ ]:
```
```