

cours-EDP-III

February 12, 2024

1 Résolution d'Équations aux Dérivées partielles III

Objectifs :

- Résolution théorique de l'équation de transport linéaire à coefficient constant sur \mathbb{R} et sur $[0, 1]$.
- Schéma numérique par différences finies, avec dérivée en espace décentrée en amont. Stabilité si la condition CFL est remplie.
- Mise en évidence de l'instabilité numérique du schéma avec dérivées en espace décentrées en aval, quelques soient les pas d'espace et de temps.

1.1 L'équation de transport linéaire à coefficient constant

1.1.1 Résolution théorique

Pour $c \in \mathbb{R}$ on considère l'équation de transport linéaire à vitesse constante sur \mathbb{R} :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

On a le résultat théorique suivant :

Proposition 1. Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique fonction $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ qui est solution de (1), et elle est donnée par la formule

$$(2) \quad u(t, x) = u_0(x - ct).$$

Remarque 2. Une équation de transport modélise le phénomène d'advection. Ici, par (2), on constate qu'à l'instant t , la solution $x \mapsto u(t, x) = u_0(x - ct)$ est la donnée initiale u_0 que l'on a translaté en espace de ct . La solution se déplace donc à vitesse c .

Preuve. Montrons tout d'abord que (2) est bien une solution. On calcule par (2) et en dérivant une composée de fonction que

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = -c \frac{d}{dx} u_0(x - ct) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial x} u(t, x) = \frac{d}{dx} u_0(x - ct).$$

Donc $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -c \frac{d}{dx} u_0(x - ct) + c \frac{d}{dx} u_0(x - ct) = 0$, et u résout la première équation de (1). On a à $t = 0$ par (2) que $u(0, x) = u_0(x)$ et donc la deuxième équation de (1) est satisfaite.

Montrons maintenant que toute solution $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty)$ de (1) est donnée par (2). L'idée est de voir u comme une fonction sur \mathbb{R}^2 , et d'interpréter le membre de gauche de la première équation de (1) comme la dérivée dans la direction $(1, c)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé on définit la ligne caractéristique de (1) partant de x à $t = 0$ comme étant la solution $y = y(t, x)$ de

$$\frac{d}{dt}y = c, \quad y(0) = x.$$

Cette équation est appelée équation caractéristique, elle se généralise au cas où c dépendrait de x ou de u , voir la dernière section. Sa solution est $y = x + ct$. On pose alors $z(t) = u(y(t), t) = u(x + ct, t)$. Alors

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(y(t), t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(y(t), t) = 0$$

par (1). Donc $z(t) = z(0)$. Comme $z(t) = u(x + ct, t)$ d'une part, et $z(0) = u(x, 0) = u_0(x)$ d'autre part par la deuxième ligne de (1), on conclut que $u(x + ct, t) = u_0(x)$. En faisant le changement de variable $x \mapsto x - ct$ cette formule donne bien (2).

On considère maintenant l'équation sur le segment $[a, b]$. Si $c > 0$ la solution se déplace vers la droite (on a cette intuition par la Proposition 1), et si $c < 0$ vers la gauche. Il faut donc prescrire quelle est la valeur de la solution qui rentre dans $[a, b]$. On ajoute ainsi une condition au bord de Dirichlet en a si $c > 0$, et en b si $c < 0$. Pour $c > 0$ cela donne

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in (a, b) \times (0, \infty) \\ u(a, t) = \alpha, & \forall t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition 3. Soit $u_0 \in L^1([a, b])$. Alors il existe une unique solution u de (3) dans un sens que l'on ne détaillera pas, et elle est donnée par la formule

$$(4) \quad u(t, x) = \begin{cases} u_0(x - ct) & x \geq a + ct, \\ \alpha & x < a + ct. \end{cases}$$

Remarque 4. Justifions l'intuition pour la formule (4). On observe que la première ligne correspond bien à (2). Pour la seconde, on remarque que si $x < a + ct$, alors à l'instant $t_0 = t - (x - a)/c$ la valeur α rentre en $x = a$. Cette valeur α est transportée jusqu'en $a + c(t - t_0) = x$ au temps t .

1.1.2 Exercices

Exercice 1 (transport inhomogène). Montrer que pour tout $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$, il existe une unique solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t), & \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et que celle-ci est donnée par la formule

$$u(t, x) = u_0(x - ct) + \int_0^t f(s, x - c(t - s)) ds$$

1.2 Schéma numérique par différences finies, avec dérivée en amont en espace

1.2.1 Le schéma

Soit $c > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On souhaite maintenant résoudre numériquement

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x), & \forall (x, t) \in (a, b) \times (0, \infty) \\ u(a, t) = \alpha, & \forall t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [a, b] \end{cases}$$

sur un intervalle de temps $[0, T_0]$. Pour $N \geq 1$ et $K \geq 2$ on pose $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, $\Delta t = \frac{T_0}{K-1}$, $x_i = a + (i+1)\Delta x$ et $t_k = k\Delta t$. On remarque que $x_{-1} = a$, $x_{N-1} = b$, $t_0 = 0$ et $t_{K-1} = T_0$.

L'idée est de calculer approximativement $\frac{\partial}{\partial t}u(x_i, t_k)$ en fonction de $u(x_i, t_k)$ et $u(x_i, t_{k+1})$ par une différence finie en aval en temps :

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x_i, t_k) = \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta t} + O(\Delta t).$$

On calcule approximativement $\frac{\partial}{\partial x}u(x_i, t_k)$ par différences finies décentrées en amont en espace. Puisque $c > 0$, on choisit

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x_i, t_k) = \frac{u(x_i, t_k) - u(x_{i-1}, t_k)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

L'idée est que les valeurs de u sont transportées vers la droite. Cette différence finie va faire intervenir $u(x_{i-1})$ dans l'évolution de $u(x_i)$, ce qui est cohérent avec ce sens du transport. Si on avait $c < 0$, on choisirait

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x_i, t_k) = \frac{u(x_{i+1}, t_k) - u(x_i, t_k)}{\Delta x} + O(\Delta x)$$

respectivement. En combinant ces deux identités et (5) on obtient :

$$(6) \quad \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta t} + c \frac{u(x_i, t_k) - u(x_{i-1}, t_k)}{\Delta x} = f(x_i) + O(\Delta t + \Delta x)$$

On approxime $u(x_i, t_k)$ par $v_{i,k}$, donné par le schéma aux différences finies où l'on a enlevé le terme de reste dans (6) :

$$(7) \quad \begin{cases} v_{-1,k} = \alpha, & \forall k \in \{0, \dots, K-1\}, \\ \frac{v_{i,k+1} - v_{i,k}}{\Delta t} + c \frac{v_{i,k} - v_{i-1,k}}{\Delta x} = f(x_i), & \forall (i, k) \in \{0, \dots, N-1\} \times \{0, \dots, K-1\}, \\ v_{i,0} = u_0(x_i), & \forall i \in \{0, \dots, N-1\} \end{cases}$$

La solution de (7) est donnée par la suite de vecteurs $(v_{\cdot, k})_{0 \leq k \leq K-1}^T$ avec $v_{\cdot, k}^T = (v_{-1, k}, v_{0, k}, \dots, v_{N, k}) = (\alpha, \tilde{V}_k^T)$ avec $\tilde{V}_k = (v_{0, k}, \dots, v_{N-1, k})^T$ solution de :

$$(8) \quad \begin{cases} \tilde{V}_0 = (u_0(x_0), \dots, u_0(x_{N-1}))^T, \\ \tilde{V}_{k+1} = \tilde{V}_k - c \frac{\Delta t}{\Delta x} M \tilde{V}_k + \Delta t F, \end{cases}$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & (0) \\ -1 & 1 & 0 & \\ & \cdot & \cdot & \\ (0) & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x_0) + \frac{c}{\Delta x} \alpha \\ f(x_1) \\ \cdot \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

La fonction `transport_amont(a,b,c,alpha,T0,f,u0,N,K)` calcule la solution $(\tilde{V}_k)_{0 \leq k \leq K-1}$ par cette méthode :

```
[79]: import numpy as np
def transport_amont(a,b,c,alpha,f,u0,T0,N,K):
    Delta_x=(b-a)/(N)
    Delta_t=T0/(K-1)
    X=np.array([a+(i+1)*Delta_x for i in range(N)])
    F=np.array([f(X[i]) for i in range(N)])
    F[0]=f(X[0])+c*alpha/Delta_x
    M=np.identity(N)-np.eye(N,N,-1)
    Vtilde=np.zeros([N,K])
    for i in range(N):
        Vtilde[i,0]=u0(X[i])
    for k in range(K-1):
        Vtilde[:,k+1]=Vtilde[:,k]-c*Delta_t/Delta_x*M@Vtilde[:,k]+Delta_t*F
    V=np.zeros([N+1,K])
    V[1:N+1,:]=Vtilde
    for k in range(K-1):
        V[0,k]=alpha
    return(V)
```

On illustre la fonction `transport_amont` ci-dessous avec $a = 0$, $b = 1$, $c = 0.2$, $\alpha = 5$ pour la donnée initiale $u_0(x) = x$, et pour un forçage nul $f = 0$.

On rappelle que la condition (CFL) du schéma (7) est :

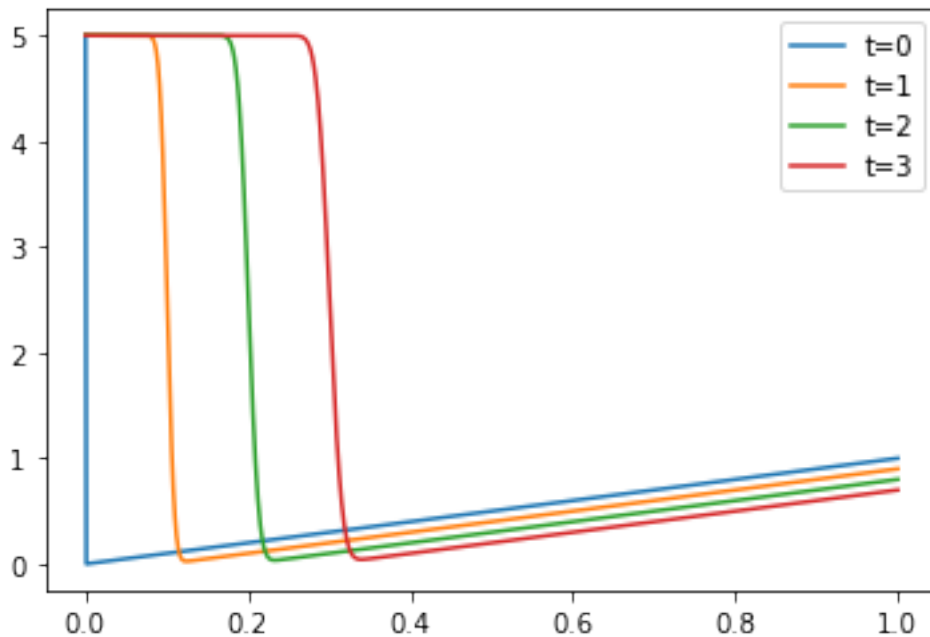
$$(9) \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{c}.$$

Dans l'illustration numérique ci-dessous, on on choisi $\Delta x = \frac{1}{1000}$ et $\Delta t = \frac{1}{400}$. On a donc $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 2.5 < \frac{1}{c} = 5$, et la condition (CFL) (9) est bien remplie.

```
[80]: from matplotlib import pyplot as plt
def u0_1(x):
    return(x)
def f1(x):
    return(0)
x2=np.linspace(0,1,1000)
V2=transport_amont(0,1,0.2,5,f1,u0_1,5,999,2001)
V2_0=V2[:,0]
V2_1=V2[:,200]
V2_2=V2[:,400]
V2_3=V2[:,600]
```

```
plt.plot(x2,V2_0,label="t=0")
plt.plot(x2,V2_1,label="t=1")
plt.plot(x2,V2_2,label="t=2")
plt.plot(x2,V2_3,label="t=3")
plt.legend()
```

[80]: <matplotlib.legend.Legend at 0x16077efa0>



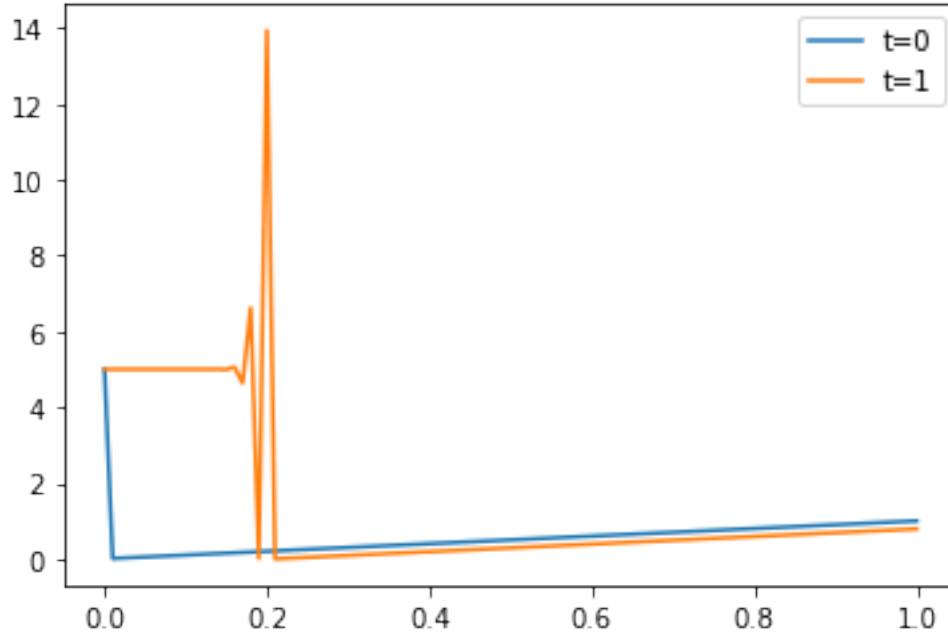
On constate que cette solution ressemble effectivement à celle donnée par la formule (4).

1.2.2 Instabilité si la condition CFL n'est pas remplie.

Ci-dessous nous reprenons l'exemple précédent, mais avec $\Delta x = \frac{1}{100}$ et $\Delta t = \frac{1}{19}$ de sorte que $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 5 + \frac{5}{19} > \frac{1}{2}$, et donc la condition (CFL) (9) n'est pas remplie.

```
[81]: x3=np.linspace(0,1,101)
V3=transport_amont(0,1,0.2,5,f1,u0_1,5,100,96)
V3_0=V3[:,0]
V3_1=V3[:,20]
plt.plot(x3,V3_0,label="t=0")
plt.plot(x3,V3_1,label="t=1")
plt.legend()
```

[81]: <matplotlib.legend.Legend at 0x1607fd190>



On constate effectivement que le schéma est instable.

1.2.3 Exercices

Exercice 2 Soit $c > 0$. On suppose maintenant que α et f dépendent du temps, ce qui donne le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = f(x, t), & \forall (x, t) \in (a, b) \times (0, \infty) \\ u(a, t) = \alpha(t), & \forall t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [a, b]. \end{cases}$$

Adapter le schéma numérique avec dérivée en amont précédent pour pouvoir résoudre numériquement le problème ci-dessus. Tester votre schéma sur l'exemple de votre choix.

Exercice 3 On considère l'équation de Burgers pour une solution positive $u \geq 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = 0, & \forall (x, t) \in (0, 1) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = 0, & \forall t \in (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x), & \forall x \in [0, 1]. \end{cases}$$

1. Adapter le schéma numérique avec dérivée en amont précédent pour pouvoir résoudre numériquement le problème ci-dessus.
2. Tester votre schéma pour u_0 croissante. Vous devriez constater que la solution existe pour tout temps $t > 0$.
3. Tester votre schéma pour u_0 telle que $\frac{d}{dx}u_0$ est assez négatif en un point. Vous devriez constater qu'il existe un temps $T > 0$ pour lequel la dérivée de la solution diverge (la solution devient singulière).

4. Essayer d'expliquer le phénomène vu en **3.** à l'aide de vos notes de cours sur la méthode des lignes caractéristiques.

1.3 Instabilité pour tous pas de discrétisation d'un schéma aval en espace

On va implémenter un schéma en aval en espace, pour se rendre compte qu'il est toujours instable. **Il faut donc toujours faire le schéma précédent avec une dérivée en amont pour une équation de transport, et jamais le schéma qui suit avec une dérivée en aval.**

On prend à nouveau $c > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On souhaite résoudre numériquement (5), mais en approximant $\frac{\partial}{\partial x}u(x_i, t_k)$ par différences finies décentrées en aval en espace. Puisque $c > 0$, on choisit

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x_i, t_k) = \frac{u(x_{i+1}, t_k) - u(x_i, t_k)}{\Delta x} + O(\Delta x).$$

Cette différence finie va faire intervenir $u(x_{i+1})$ dans l'évolution de $u(x_i)$, ce qui est incohérent avec le sens du transport. En combinant ces deux identités et (5) on obtient :

$$(10) \quad \frac{u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{i+1}, t_k) - u(x_i, t_k)}{\Delta x} = f(x_i) + O(\Delta t + \Delta x)$$

On voit que pour $i = N - 1$ on a un problème car $x_{i+1} = x_N$ n'est pas défini. Le schéma en aval en espace n'est donc déjà même pas bien adapté pour les conditions au bord. On choisit donc une dérivée en amont en ce point : $\frac{u(x_{N-1}, t_{k+1}) - u(x_{N-1}, t_k)}{\Delta t} + c \frac{u(x_{N-1}, t_k) - u(x_{N-2}, t_k)}{\Delta x} = f(x_i) + O(\Delta t + \Delta x)$.

On approxime $u(x_i, t_k)$ par $v_{i,k}$. Le schéma est donnée par la suite de vecteurs $(v_{\cdot,k})_{0 \leq k \leq K-1}^T$ avec $v_{\cdot,k}^T = (v_{-1,k}, v_{0,k}, \dots, v_{N,k}) = (\alpha, \tilde{V}_k^T)$ avec $\tilde{V}_k = (v_{0,k}, \dots, v_{N-1,k})^T$ solution de :

$$\begin{cases} \tilde{V}_0 = (u_0(x_0), \dots, u_0(x_{N-1}))^T, \\ \tilde{V}_{k+1} = \tilde{V}_k - c \frac{\Delta t}{\Delta x} M \tilde{V}_k + \Delta t F, \end{cases}$$

où :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & (0) \\ 0 & -1 & 1 & & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & -1 & 1 \\ (0) & & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \cdot \\ f(x_{N-2}) \\ f(x_{N-1}) \end{pmatrix}$$

La fonction `transport_aval(a,b,c,alpha,T0,f,u0,N,K)` calcule la solution $(\tilde{V}_k)_{0 \leq k \leq K-1}$ par cette méthode :

```
[82]: import numpy as np
def transport_aval(a,b,c,alpha,f,u0,T0,N,K):
    Delta_x=(b-a)/(N)
    Delta_t=T0/(K-1)
    X=np.array([a+(i+1)*Delta_x for i in range(N)])
    F=np.array([f(X[i]) for i in range(N)])
    M=-np.identity(N)+np.eye(N,N,1)
    M[N-1,N-1]=1
    M[N-1,N-2]=-1
    Vtilde=np.zeros([N,K])
```

```

for i in range(N):
    Vtilde[i,0]=u0(X[i])
for k in range(K-1):
    Vtilde[:,k+1]=Vtilde[:,k]-c*Delta_t/Delta_x*M@Vtilde[:,k]+Delta_t*F
V=np.zeros([N+1,K])
V[1:N+1,:]=Vtilde
for k in range(K-1):
    V[0,k]=alpha
return(V)

```

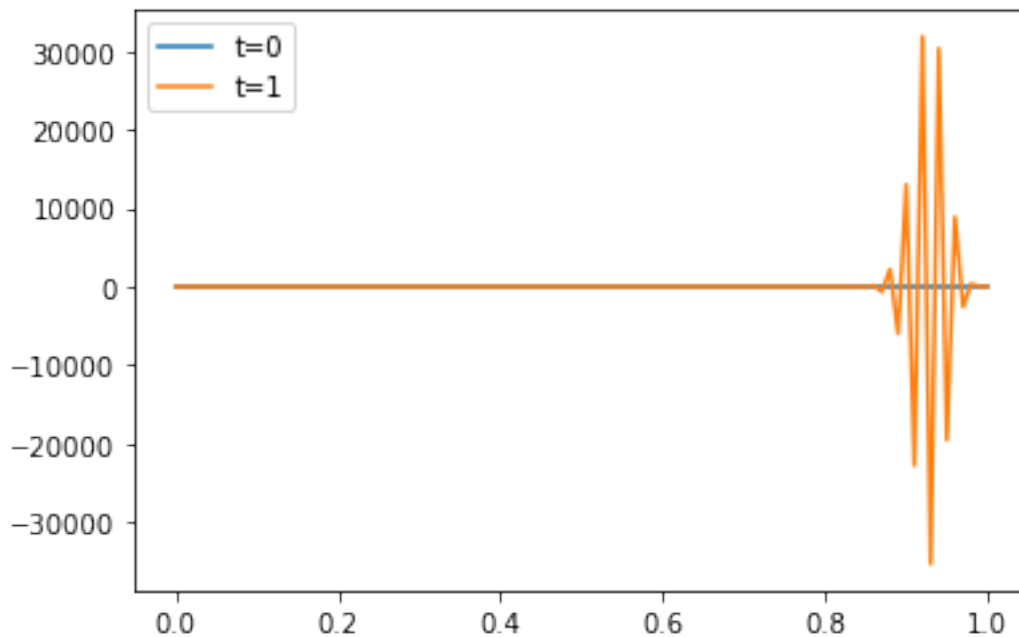
On illustre la fonction `transport_aval` ci-dessous avec $a = 0$, $b = 1$, $c = 0.2$, $\alpha = 0$ pour la donnée initiale $u_0(x) = x^2$, et pour un forçage nul $f = 0$.

```

[83]: def f4(x):
        return(0)
def u0_4(x):
        return(x**2)
x4=np.linspace(0,1,101)
V4=transport_aval(0,1,0.2,5,f4,u0_4,5,100,96)
V4_0=V4[:,0]
V4_1=V4[:,20]
plt.plot(x4,V4_0,label="t=0")
plt.plot(x4,V4_1,label="t=1")
plt.legend()

```

[83]: <matplotlib.legend.Legend at 0x16086e520>



1.4 Convergence du schéma numérique par différences finies, avec dérivée en amont en espace

1.4.1 Stabilité, Consistance, et Convergence

On réécrit le schéma (8) sous la forme

$$\tilde{V}_{k+1} = A\tilde{V}_k + \Delta t F, \quad A = M = \begin{pmatrix} 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} & 0 & & (0) \\ c \frac{\Delta t}{\Delta x} & 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} & 0 & \\ & \cdot & \cdot & \\ (0) & & c \frac{\Delta t}{\Delta x} & 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{pmatrix}$$

Nous allons étudier sa stabilité dans L^∞ . On pose donc pour $V \in \mathbb{R}^N$, $|V|_\infty = \max_{0 \leq i \leq N-1} |V_i|$.

Definition. On dit que le schéma est stable si pour tout $T_0 > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout Δt et Δx assez petits, pour tout $\tilde{V}_0, F \in \mathbb{R}^N$, on a pour tout $0 \leq k \leq K$:

$$|\tilde{V}_{\cdot, k}|_\infty \leq C (|\tilde{V}_{\cdot, 0}|_\infty + |\tilde{F}|_\infty)$$

Lemme. Si $c > 0$ (de sorte que le schéma est bien avec des dérivées en amont en espace), et si la condition (CFL) (pour Courant-Friedrich-Lewy) $\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{c}$ est remplie, alors le schéma est stable.

Preuve. Soit $V \in \mathbb{R}^n$. Alors pour $i = 0$, $(AV)_0 = (1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x})V_0$ et $0 < 1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1$ de par la condition (CFL). Donc $|(AV)_0| < |V_0| < |V|_\infty$. Pour $1 \leq i \leq N$, $(AV)_i = c \frac{\Delta t}{\Delta x} V_{i-1} + (1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x})V_i$ et donc

$$\begin{aligned} |(AV)_i| &\leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} |V_{i-1}| + (1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x}) |V_i| \\ &\leq c \frac{\Delta t}{\Delta x} |V|_\infty + (1 - c \frac{\Delta t}{\Delta x}) |V|_\infty \\ &= |V|_\infty \end{aligned}$$

Donc $\|AV\|_\infty \leq \|V\|_\infty$.

On a alors $\|\tilde{V}_{k+1}\|_\infty \leq \|\tilde{V}_k\|_\infty + \Delta t \|F\|_\infty$ et donc

$$\|\tilde{V}_{k+1}\|_\infty \leq \|\tilde{V}_k\|_\infty + \Delta t \|F\|_\infty.$$

En itérant, $\|\tilde{V}_{k+1}\|_\infty \leq \|\tilde{V}_{k-1}\|_\infty + 2\Delta t \|F\|_\infty \leq \dots \leq \|\tilde{V}_0\|_\infty + k\Delta t \|F\|_\infty$. Comme $K\Delta t = T_0$ on a $\|\tilde{V}_{k+1}\|_\infty < \|\tilde{V}_0\|_\infty + T_0 \|F\|_\infty$, ce qui démontre le lemme.

Definition. Soit u une solution de (3). Alors l'erreur de consistance au temps t_k est le vecteur $\varepsilon_{\cdot, k}$ où

$$\varepsilon_{i, k} = u(x_i, t_k) - u(x_i, t_{k+1}) - c\Delta t \frac{u(x_i, t_k) - u(x_{i-1}, t_k)}{\Delta x} + \Delta t f(x_i, t_k)$$

On dit qu'un schéma est consistant d'ordre p si pour u une solution de classe C^{k+1} de (3) et $T_0 > 0$, il existe $C > 0$ telle que pour tout Δx et Δt assez petits :

$$|\varepsilon_{\cdot, k}|_\infty \leq C\Delta t ((\Delta t)^p + (\Delta x)^p)$$

Lemme. Le schéma (8) est consistant d'ordre 1.

Preuve. On a par la formule de Taylor avec reste intégral,

$$u(x_i, t_{k+1}) - u(x_i, t_k) = \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t - t_k) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x_i) dt = \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) + O((\Delta t)^2)$$

De même,

$$\frac{u(x_i, t_k) - u(x_{i-1}, t_k)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t_k) + O(\Delta x).$$

Donc

$$\varepsilon_{i,k} = -\Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_k) + O((\Delta t)^2) - \Delta t c \frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t_k) + O(\Delta t \Delta x) = O((\Delta t)^2) + O(\Delta t \Delta x)$$

d'où le résultat.

Definition. On dit que le schéma est convergent si

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} \max_{0 \leq 1 \leq K, 0 \leq i \leq N} |u(x_i, t_k) - \tilde{V}_{i,k}| = 0.$$

On dit qu'il est convergent d'ordre p si pour u une solution de classe C^{p+1} , il existe $C > 0$ telle que pour Δx et Δt assez petits,

$$\max_{0 \leq 1 \leq K, 0 \leq i \leq N} |u(x_i, t_k) - \tilde{V}_{i,k}| \leq C((\Delta x)^p + (\Delta t)^p)$$

Théorème. Le schéma par différences finies, avec dérivées spatiales en amont, est convergent d'ordre 1.

1.4.2 Exercices

Exercice 4. Démontrer le théorème de la convergence d'ordre 1 du schéma avec dérivées en amont. Pour cela, reproduisez l'idée de la preuve du théorème de convergence pour le schéma d'Euler explicite de votre cours pour les EDO, en utilisant à nouveau que stabilité + consistance d'ordre p implique convergence d'ordre p , et les lemmes précédents le théorème.

[]: