cours - EDO 1

November 10, 2023

1 Résolution d'Équations Différentielles Ordinaires I

Objectifs : - Implémentation de la méthode d'Euler explicite. - Implémentation de la méthode d'Euler implicite. - Représentation graphique - Mise en évidence de leur ordre (de convergence) sur des exemples. - Utilisation des routines de scipy pour la résolution d'EDO

1.1 Méthode d'Euler explicite

1.1.1 L'algorithme

On considère l'équation différentielle

$$(1) \qquad \begin{cases} \dot{x} = f(x,t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

On a utilisé ci-dessus la notation $\dot{x} = \frac{d}{dt}x$. On se donne une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et un temps t, et on cherche à calculer numériquement $x(t)$. La méthode d'Euler explicite consiste à prendre un nombre de discrétisation K, à définir le pas de temps $h = \frac{t}{K}$, et à calculer la suite $(x_k)_{0\leq k\leq K}$ itérativement par :

$$(2) \qquad x_{k+1} = x_k + hf(x_k).$$

L'idée est que x_k va alors approximer $x(kh)$, et que x_K approximera donc $x(t)$. Voir votre cours pour plus d'explications.

La fonction `eul_exp(f,x0,t,K)` ci-dessous prend en entrée une fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, une position initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, un temps t et un nombre de discrétisation K, et renvoie une valeur approchée de $x(t)$ calculée à l'aide du schéma d'Euler explicite pour un pas de temps t/K.

[44]:
```
import numpy as np
def eul_exp(f,x0,t,K):
    y=np.copy(x0)      # y représente initialement le vecteur x0
    h=t/K
    for k in range(K):
        y=y+h*f(y,k*h)      # puis y représente l'itéré x_{k+1} de l'algorithme d'Euler explicite pour k entre 0 et N-1
    return(y)
```

1.1.2 Illustration sur un exemple

On la teste ci-dessous sur l'exemple de l'équation différentielle ordinaire (EDO) :

$$(3) \qquad \dot{x} = x - x^3 + t,$$

pour la donnée initiale $x_0 = 4$ et un temps $t = 5$.

[45]:
```
def f1(x,t):
    return(x-x**3+t)
x01=4
eul_exp(f1,x01,5,100)
```

[45]:
```
1.8936200736888098
```

Pour représenter l'ensemble des valeurs prises dans le temps sur $[0,t]$, il convient de garder toutes les valeurs $(x_k)_{0\leq k\leq K}$.

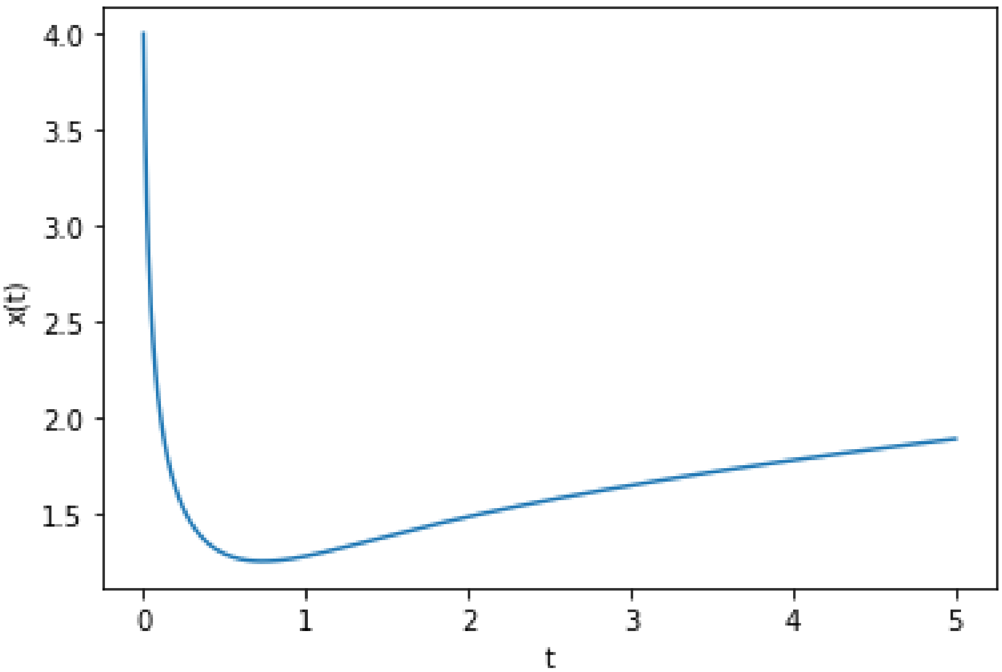
La fonction `eul_exp2(f,x0,t,K)` ci-dessous prend en entrée une fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, une position initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$, un temps t et un nombre de discrétisation K, et renvoie la matrice X dont la k-ième ligne est le vecteur x_k calculé à l'aide du schéma d'Euler explicite pour un pas de temps t/K.

[46]:
```
def eul_exp2(f,x0,t,K):
    n=len(x0)
    X=np.zeros([K+1,n])
    X[0]=x0      # la premiere ligne de M est le vecteur x0
    h=t/K
    for k in range(K):
        X[k+1]=X[k]+h*f(X[k],k*h)      # puis y représente l'itéré x_{k+1} de␣
 ↪l'algorithme d'Euler explicite pour k entre 0 et N-1
    return(X)
```

On l'utilise ci-dessous pour représenter la courbe $\{(t,x(t))\ 0 \leq t \leq 5\}$ de l'exemple (3) précédent pour la même donnée initiale $x_0 = 4$.

[48]:
```
%matplotlib inline
from matplotlib import pyplot as plt
def f2(x,t):
    return(np.array([x[0]-x[0]**3+t]))
x02=np.array([4])
X2=eul_exp2(f2,x02,5,1000)
T2=np.linspace(0,5,1001)
plt.plot(T2,X2)
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("x(t)")
```

[48]:
```
Text(0, 0.5, 'x(t)')
```



1.1.3 Exercices

Exercice 1 (modèle de Bass pour la diffusion d'un produit) On dénote par $x(t) \in [0,1]$ la proportion de la population qui a acquis le produit. Sur un intervalle de temps infinitésimal de taille Δt, parmi les individus qui n'ont pas encore le produit, certains peuvent "innover" et acheter le produit avec une probabilité $p\Delta t$ (où p est coefficient d'innovation). D'autres, s'ils rencontrent un individu ayant déjà acquis le produit, peuvent "imiter" et acheter le produit avec une probabilité $q\Delta t$ (où q est le coefficient d'imitation).

L'équation différentielle ordinaire correspondante est :

$$(4) \qquad x'(t) = (1 - x(t))p + (1 - x(t))x(t)q$$

1. Expliquer formellement (c'est-à-dire sans trop de détails techniques), pourquoi l'équation (4) correspond bien au paragraphe introductif du modèle.

2. On suppose que le temps est mesuré en années, que $p = 0.5$ et $q = 3$, et qu'initialement personne ne possède le produit $x(0) = 0$. À l'aide des fonctions `eul_exp` ou `eul_exp2` représenter graphiquement la courbe $\{(t, x(t)),\ 0 \le t \le 2\}$ de la solution de (4). Que constatez-vous lorsque $t \to \infty$?

3 La fraction d'innovateur dans la population sur un intervalle de taille Δt est $(1-x)p\Delta t$. La fraction totale d'individus ayant innové jusqu'au temps T est donc $\int_0^T (1 - x(t))pdt$. Par la méthode des rectangles à gauche, cette intégrale est approximée par $ *{k=0}^{K-1} h(1-x(k h))p $ où* $h = \frac{T}{K}$.

En calculant x avec la méthode d'Euler explicite pour le même pas de temps h, cette intégrale est ensuite approximée par $hp {k=0}^{K-1} (1-x_k) $ où x_k est donné par (2).

Calculer numériquement de cette manière, pour la même condition initiale que la question **2.**, la fraction d'individus ayant innové jusqu'aux temps 1 et 2.

4. La fraction d'imitateur sur un intervalle de taille Δt est $x(1-x)q\Delta t$. La fraction totale d'imitateur jusqu'au temps T est donc $\int_0^T x(t)(1-x(t))qdt$. Calculer numériquement pour la même condition initiale que la question **2.**, et de la même manière qu'à la question **3.**, la fraction d'individus ayant imité jusq'aux temps 1 et 2. Vérifier qu'au temps 2 la somme de la fraction d'individus ayant innové et de la fraction d'individus ayant imité est égale à 1.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle ordinaire

$$(5) \qquad \dot{x} = x^2$$

pour la donnée initiale $x(0) = 1$.

1. On pose $t = 2$. Calculer l'approximation x_K de $x(2)$ donnée par la méthode d'Euler explicite, en utilisant la fonction `eul_exp`, pour $K = 5, 10, 15, 20, 30$. Que constatez-vous ?

2. Calculer explicitement à la main la solution de (5) pour la donnée initiale $x(0) = 1$. Proposer une explication pour le constat fait à la question **1.**

1.2 Méthode d'Euler implicite

1.2.1 L'algorithme

On cherche toujours à résoudre les solutions de

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Lorsque x_k (représentant une approximation de $x(t)$ au temps $t_k = kh$ avec $h = t/K$) est calculé, on calcule x_{k+1} en résolvant :

$$(2) \qquad x_{k+1} = x_k + hf(x_{k+1}, t_{k+1}).$$

On peut réécrire (2) sous la forme $x_{k+1} - x_k - hf(x_{k+1}, t_{k+1}) = 0$. Pour x_k, t_{k+1} et h donnés, l'équation (2) pour x_{k+1} est donc un système non-linéaire de la forme :

$$(3) \qquad F_{x_k, t_{k+1}, h}(x_{k+1}) = 0,$$

avec

$$(4) \qquad F_{x,t,h}(y) = y - x - hf(y,t).$$

On choisit de résoudre (3) à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson vu dans le cours sur la résolution de systèmes non linéaires. Sa mise en pratique demande que la fonction $F_{x_k, t_{k+1}, h}$ soit différentiable. On suppose donc que f est différentiable par rapport à la première variable. La matrice Jacobienne de $F_{x_k, t_{k+1}, h}$ est alors donnée par :

$$(5) \qquad JF_{x_k, t_{k+1}, h}(x_{k+1})(y) = Id - hJ_x f(y,t)$$

où $J_x f(y,t)$ est la matrice de la Jacobienne de f par rapport à la première variable seulement. On commence par rappeler ci-dessous le code de l'algorithme de Newton-Raphson.

[78]:
```python
def new_rap(F,JF,x0,eps,N):
    e=2*eps
    n=0
    x=x0
    while e>eps and n<N:
        x=x-np.linalg.solve(JF(x),F(x))
        e=np.linalg.norm(F(x))
        n=n+1
    if n<N:
        return(x)
    else:
        return("l'algorithme n'a pas converge")
```

La fonction `eul_imp(f,Jxf,x0,t,K,eps,N)` ci-dessous prend en entrée une fonction f, sa différentielle par rapport à la première variable $J_x f$, une donnée initiale x_0, un temps t, un nombre de discrétisation K, ainsi qu'un seuil d'erreur ϵ et un nombre maximal d'itération N pour l'appel de la fonction `new_rap` dont le code est ci-dessus.

[79]:
```python
def eul_imp(f,Jxf,x0,t,K,eps,N):
    n=len(x0)
    y=np.copy(x0)         # y représente initialement le vecteur x0
    h=t/K
    for k in range(K):
        def F_aux(x):       # F_aux represente la fonction F_{x_k,t_{k+1},h}␣
↪donnee par (4)
            return(x-h*f(x,(k+1)*h)-y)
        def JF_aux(x):
            return(np.identity(n)-h*Jxf(x,(k+1)*h))    # JF_aux represente la␣
↪fonction JF_{x_k,t_{k+1},h} donnee par (5)
        z=new_rap(F_aux,JF_aux,y,eps,N)     # on prend y qui represente x_k comme␣
↪valeur initiale pour l'algorithme de Newton-Raphson
        y=z               # puis on met a jour y pour qu'il represente l'itere␣
↪x_{k+1} de l'algorithme d'Euler implicite
    return(y)
```

On teste la fonction `eul_imp` pour résoudre le même exemple d'EDO que celui traité dans la première section sur le schéma d'Euler explicite :

$$\dot{x} = x - x^3 + t$$

pour la donnée initiale $x_0 = 4$ et un temps $t = 5$.

[212]:
```python
def f5(x,t):
    return(np.array([x[0]-x[0]**3+t]))
def Jxf5(x,t):
    return(np.array([1-3*x[0]**2]))
x05=np.array([4])
eul_imp(f5,Jxf5,x05,5,10,0.01,10)
```

[212]: array([1.89486795])

1.2.2 Exercices

Exercice 3.

Au lieu d'avoir à coder de nouveau l'algorithme de Newton-Raphson, en écrivant la fonction `new_rap`, on aurait pu utiliser une routine de scipy.optimize.

1. Écrire une fonction `eul_imp2(f,x0,t,K)` qui prend en entrée une fonction f, une donnée initiale x_0, un temps t et un entier K, et renvoie $x(t)$ la solution de (1) au temps t, en mettant en oeuvre la méthode d'Euler implicite, mais en utilisant au choix soit la routine `scipy.optimize.roots` soit la routine `scipy.optimize.fsolve` pour résoudre (2).

2. Utiliser cette fonction pour représenter la courbe $\{(t, x(t)),\ 0 \leq t \leq 0.99\}$ de la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = x^2$ avec donnée initiale $x(0) = 1$. Que constatez-vous lorsque $t \to 1$?

Exercice 4 (Efficacité de la méthode d'Euler implicite pour des problèmes raides)

On considère pour un paramètre $\epsilon > 0$ l'équation différentielle ordinaire

$$x'(t) = \frac{1}{\epsilon}(-x(t) + \cos(t))$$

avec donnée initiale $x(0) = 1$.

1. On choisit $\epsilon = 0.09$. Représenter numériquement à l'aide de la fonction `eul_exp2` la courbe $\{(t, x(t))\}$ de la solution solution donnée par la méthode d'Euler explicite pour l'intervalle de temps $[0, 10]$ et le pas de temps $h = 0.2$ (c'est-à-dire $K = 50$). Que constatez-vous ?

2. On choisit toujours $\epsilon = 0.1$. Représenter numériquement la solution donnée par la méthode d'Euler implicite pour l'intervalle de temps $[0, 10]$ et le pas de temps $h = 0.2$. Que constatez-vous par rapport à la question **1.** ?

3. Déterminer à la main explicitement la solution de l'équation différentielle ordinaire de l'exercice. Représenter graphiquement les courbes obtenues aux question **1.** et **2.** et celle obtenue par cette formule explicite. Quelle méthode vous semble la plus efficace pour approximer la solution exacte ?

Remarque : Une équation différentielle est dite raide lorsqu'elle contient de petites échelles de temps (ici ϵ). La méthode d'Euler explicite a un problème de convergence lorsque le pas de temps est plus grand que cette échelle de temps $h > \epsilon$, alors que la méthode d'Euler implicite peut rester une bonne approximation.

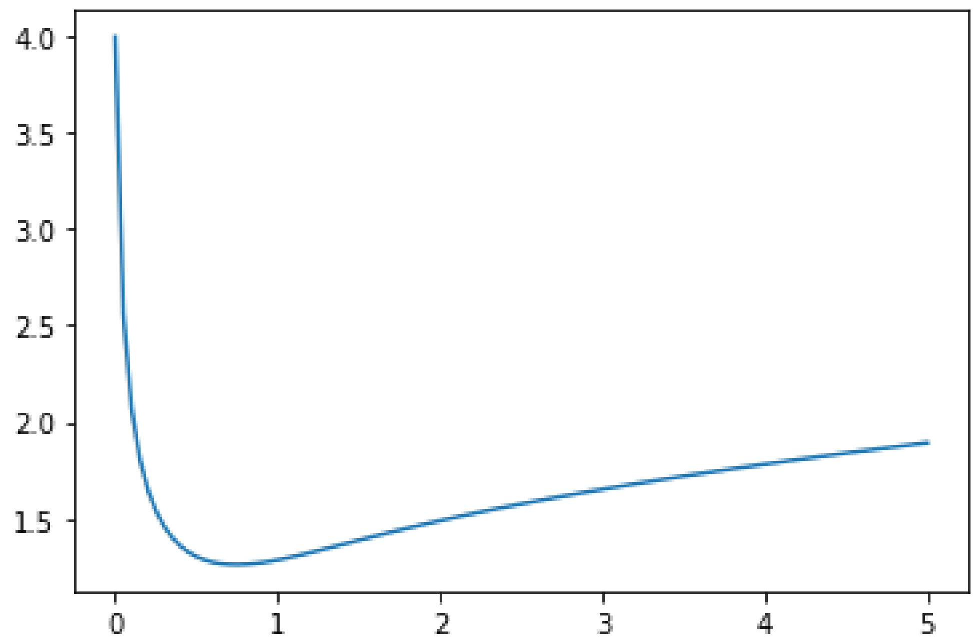
1.3 La routine de scipy.integrate

La fonction `scipy.integrate.odeint(f,x0,t)` prend en entrée une fonction f, une donnée initiale x_0 et un vecteur de temps $t = (t_0, ..., t_{n-1})$ et renvoie le vecteur $(x(t_0), x(t_1), ..., x(t_{n-1}))$ des valeurs de la solution de $\dot{x} = f(x, t)$ aux temps $t_0, t_1, ..., t_{n-1}$. Attention, même si vous résolvez une EDO autonome, la fonction f doit être écrite comme une fonction de deux variables (x, t). La fonction `scipy.integrate.odeint` fonctionne dans le cas vectoriel : x peut etre un array de numpy (et f une fonction a valeur dans l'ensemble des array de numpy). Il est possible de donner d'autres arguments à `scipy.integrate.odeint`, voir `help(scipy.integrate.odeint)`.

On reprend ci-dessous l'exemple de $\dot{x} = x - x^3 + t$.

[121]:
```
import scipy.integrate as sc_int
def f7(x,t):
    return(x-x**3+t)
x07=4
t7=np.linspace(0,5,100)
x7=sc_int.odeint(f7,x07,t7)
plt.plot(t7,x7)
```

[121]:
```
[<matplotlib.lines.Line2D at 0x13a10ae80>]
```



Exercice 5. (modèle monétariste canonique d'inflation chômage)

Ce modèle repose sur 4 équations structurelles. La première équation exprime le taux de croissance des salaires w en fonction du taux de chomage U et du taux d'inflation anticipé par les individus π

$$w(t) = -\beta U(t) + \alpha + h\pi(t), \qquad \alpha, \beta > 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq h < 1.$$

La deuxième équation décrit le taux d'inflation réel p en fonction du taux de croissance des salaires :

$$p(t) = w(t) - T$$

où T est le taux de croissance de la productivité du travail supposé constant. La troisième équation décrit la variation du taux d'inflation anticipé π par rapport au taux d'inflation réel p :

$$\pi'(t) = j(p(t) - \pi(t)), \qquad 0 < j \leq 1.$$

La quatrième équation décrit la variation du taux de chomage en fonction du taux d'inflation réel

$$U'(t) = -k(m - p(t)), \qquad k > 0,$$

où m est le taux de croissance de la masse monétaire que l'on suppose constant.

1. A l'aide des deux premières équations exprimer à la main p en fonction de U et de π.

2. A l'aide de votre réponse à la question **1.**, montrer que le vecteur (π, U) résout l'équation différentielle ordinaire

$$(6) \qquad \begin{cases} \pi' = j(h-1)\pi - j\beta U + j(\alpha - T), \\ U' = kh\pi - k\beta U - k(m + T - \alpha). \end{cases}$$

3. On prend comme valeurs $\alpha = \frac{1}{2}$, $T = \frac{1}{6}$, $m = 5$, $h = \frac{7}{8}$, $j = \frac{3}{4}$ et $k = \frac{1}{2}$.

On choisit $\beta = 1/2$. Tracer numériquement dans le plan la courbe $\{(\pi(t), U(t)), t \in [0, 100]\}$ des valeurs prises par la solutions de (6) avec donnée initiale $(\pi(0), U(0)) = (1, 1)$. Tracer numériquement dans le même plan la courbe de donnée initiale $(\pi(0), U(0)) = (4, 0)$. Que constatez-vous ?

4. On prend les mêmes valeurs pour $\alpha, T =, m = 5, h, j, k =$ qu'à la question **3.** et on choisit $\beta = 10$.

Tracer numériquement dans le plan, comme à la question **3.**, les courbes de solutions de (6) avec des données initiales de votre choix. Constatez-vous un changement par rapport aux trajectoires de la question **3.** ?

5. Calculer numériquement, pour les valeurs des paramètres j, h, β, k des questions **3.** et **4.**, les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} j(h-1) & -j\beta \\ kh & -k\beta \end{pmatrix}$. Expliquer alors les résultats numériques obtenus aux questions **3.** et **4.**

```
[ ]:
```