

Comparaison de deux variances, F de Fisher

Exercice 1

Deux méthodes de dosage de l'azote ont été répétées, à partir d'un même échantillon, 25 fois avec la méthode A, 30 fois avec la méthode B. Les résultats sont rassemblés dans les tableaux ci-dessous.

Méthode A	
x_i (en g)	n_i
37	1
39	2
40	2
41	4
42	7
43	4
44	2
46	2
47	1
Total	25

Méthode B	
x_i (en g)	n_i
39	2
40	1
41	6
42	9
43	8
44	3
45	1
Total	30

- 1) Tester l'hypothèse : "les valeurs moyennes obtenues par les deux méthodes sont égales". (Autrement dit, les méthodes sont-elles exactes ?)
- 2) Comparer les variances des échantillons traités avec les deux méthodes. (Autrement dit, les deux méthodes ont-elles la même précision ?)

Réponses : 1) Les paramètres de statistiques descriptives sont donnés par :

	Méthode A	Méthode B
Moyenne	42.08	42.10
Variance	4.95	1.89
Variance corrigée	5.16	1.96

Le test de comparaison des deux moyennes (groupes indépendants) conduit à : $t_{obs} = -0.04$, évidemment non significatif aux seuils traditionnels. On ne peut donc pas refuser l'hypothèse H_0 d'égalité des moyennes.

2) La statistique de test suit une loi de Fisher à $ddl_1 = 24$ et $ddl_2 = 29$ degrés de liberté. On obtient : $F_{obs} = 2.63$. Au seuil de 1% unilatéral, on a $F_{crit} = 2.49$. On conclut donc à une différence des variances.

Exercice 2

Au cours de certaines expériences, on est amené à mesurer le *temps de réaction* (TR) des sujets. C'est le temps qui s'écoule entre la présentation d'un stimulus (par exemple, une lampe qui s'allume devant le sujet) et la réaction que ce stimulus doit déclencher (par exemple, presser un bouton).

Première expérience. — Le tableau 1 fournit les TR d'une personne qui a réagi 20 fois à l'allumage d'une lampe rouge. On constate que ces 20 TR ne sont pas égaux. Ces variations d'un moment à l'autre sont imprévisibles à partir des informations dont on dispose dans l'expérience.

Deuxième expérience. — Le sujet voit maintenant s'allumer devant lui une lampe qui peut être rouge, verte ou jaune. il doit réagir si la lampe est rouge, mais ne doit pas réagir dans

les deux autres cas. Le tableau 1 fournit 20 TR mesurés dans ces conditions. On observe de nouveau des variations imprévisibles d'un moment à l'autre.

Troisième expérience. — Les conditions sont les mêmes que dans la première expérience (une seule lampe) avec une seule différence : au lieu d'être rouge, la lampe donnant le signal de la réaction est verte. La troisième ligne du tableau donne les résultats. Les temps sont de nouveau différents entre eux.

Numéro d'ordre des 20 présentations	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ère expérience	20	15	18	25	17	32	18	17	19	23
2è expérience	32	40	33	37	35	29	42	62	50	39
3è expérience	16	18	19	18	15	18	17	32	23	19

Numéro d'ordre des 20 présentations	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1ère expérience	19	21	15	22	17	17	21	19	17	23
2è expérience	45	47	52	37	38	39	40	41	42	39
3è expérience	23	20	18	25	15	15	17	23	17	19

La dispersion des TR est-elle la même dans chacune des trois conditions expérimentales ? Pour répondre à cette question, comparer deux à deux les variances des trois séries de données.

Réponses : Les variances des trois séries sont données par :

	Variance	Variance corrigée
1ère expérience	14.89	15.67
2è expérience	53.85	56.68
3è expérience	16.23	17,08

Pour $ddl_1 = 19$ et $ddl_2 = 19$ et un seuil de 5%, on a : $F_{crit} = 3.00$. Ici, $F_{2,1,obs} = 3.61$, $F_{2,3,obs} = 3.31$, $F_{3,1,obs} = 1.09$. Pour les expériences 1 et 3, l'hypothèse nulle (même variance) peut être retenue. En revanche, l'expérience 2 conduit à une variance différente de celles des deux autres.

Exercice 3 Dossier "pedago"

Lors d'une expérience pédagogique, on s'intéresse à l'effet comparé de deux pédagogies des mathématiques chez deux groupes de 10 sujets :

- pédagogie traditionnelle (p_1)
- pédagogie moderne (p_2)

On note la performance à une épreuve de combinatoire.

p_1 traditionnelle		p_2 moderne	
s1	5.0	s11	4.0
s2	4.0	s12	5.5
s3	1.5	s13	4.5
s4	6.0	s14	6.5
s5	3.0	s15	4.5
s6	3.5	s16	5.5
s7	3.0	s17	1.0
s8	2.5	s18	2.0
s9	1.5	s19	4.5
s10	2.5	s20	4.5

1) Vérifier que les paramètres des deux échantillons sont donnés par :

	p_1	p_2
Moyenne	3.250	4.250
Ecart-type	1.365	1.553
Variance	1.863	2.413
Ecart-type corrigé	1.439	1.637
Variance corrigée	2.069	2.681

2) Avant d'appliquer un test de comparaison de moyennes, on veut s'assurer que l'on peut supposer les variances égales dans les populations parentes. Procéder à un test de comparaison de variances permettant de s'en assurer.

Réponses : 2) On obtient $F_{obs} = 1.30$. Or, pour $ddl_1 = 9$, $ddl_2 = 9$ et un seuil de 5%, on lit dans la table : $F_{crit} = 3.18$. L'hypothèse H_0 (égalité des variances) est donc retenue.

Exercice 4

1) Pour $ddl_1 = 2$, $ddl_2 = 4$, la densité f de la loi de Fisher-Snedecor est donnée, pour $x \geq 0$ par :

$$f(x) = \frac{8}{(2+x)^3}$$

Construire point par point la courbe de la fonction f .

2) Pour $ddl_1 = 4$, $ddl_2 = 4$, la densité g de la loi de Fisher-Snedecor est donnée pour $x \geq 0$ par :

$$g(x) = \frac{6x}{(1+x)^4}$$

Construire point par point la courbe de la fonction g .

Analyse de la variance à un facteur (ANOVA) : comparaison de k moyennes sur des groupes indépendants

Exercice 5

Un éditeur veut choisir entre trois couvertures possibles pour une revue. A cet effet, il a fait noter chaque couverture par un groupe de 5 sujets. Les trois groupes ainsi constitués sont indépendants. Les notes obtenues sont les suivantes :

Couv. 1	Couv. 2	Couv. 3
14	16	14
6	14	16
12	8	14
10	8	14
8	14	12

Le test indique-t-il une différence significative entre les trois couvertures ?

Réponses : Exercice traité en CM. Rappel des résultats.

Calcul des sommes des carrés :

	C1	C2	C3	Total
$T_{.j}$	50	60	70	180
$T_{.j}^2$	2500	3600	4900	
n_j	5	5	5	15
$\frac{T_{.j}^2}{n_j}$	500	720	980	2200
$\sum x_{ij}^2$	540	776	988	2304

$$SC_1 = 2200 - \frac{180^2}{15} = 40 ; SC_2 = 2304 - 2200 = 104 ; SC_T = 144$$

Source	SC	ddl	CM	F
\mathcal{A}	40	2	20	$F_{obs} = 2.31$
Résiduelle	104	12	8.67	
Total	144	14		

Au seuil de 5%, $F_{crit}(2, 12) = 3.89$. La différence entre les groupes n'est donc pas significative.

Complément : Modèle de score. Chaque observation x_{ij} peut s'interpréter comme la somme de trois termes :

$$x_{ij} = \mu + a_j + e_{ij}$$

avec les règles suivantes :

- μ est la moyenne de la variable X étudiée (la même, quel que soit l'individu ou le groupe) ;
- a_j est un effet dû au groupe (le même pour tous les individus d'un groupe), nul en moyenne ;
- e_{ij} est une variation due au hasard, spécifique à chaque observation, de moyenne nulle dans chaque groupe.

Sur l'exemple traité, cette décomposition s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 14 & 16 & 14 \\ 6 & 14 & 16 \\ 12 & 8 & 14 \\ 10 & 8 & 14 \\ 8 & 14 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Les sommes des carrés inter-groupes et intra-groupes se retrouvent alors comme sommes des carrés des éléments des deux dernières matrices (par exemple : $40 = 5 \times (-2)^2 + 5 \times 2^2$).

Exercice 6

Dans un établissement scolaire, on a réparti les élèves en trois classes de troisième; les notes ci-dessous sont celles obtenues par les élèves en mathématiques au Brevet des Collèges. Peut-on dire que ces trois classes sont équivalentes? Si oui, quelles seraient les caractéristiques de la population résultant de la fusion des trois groupes?

G1	G2	G3	G1	G2	G3
14	8	7	8	14	13
15	18	8	10	15	12
20	3	11	11	14	8
7	12	11	11	13	8
8	15	20	7	10	11
13	8	14	10	12	15
10	7	13	11	10	8
1	11	13	12	12	14
12	8	10	11	12	16
16	14	12	8	11	13
17	14	12		10	12
17	9	13		10	15
11	9	12		10	
6	9	14		10	
16	10	8		12	

Vérifier l'exactitude des tableaux ci-dessous et conclure.

	G1	G2	G3	Totaux	
n_j	25	29	27	81	
T_j	282	320	323	925	10563,27
Σx_{ij}^2	3600	3782	4091	11473	
T_j^2/n_j	3180,96	3531,03	3864,04	10576,03	
Inter	12,76				
Total	909,73				

Sources de variations	Sommes des carrés	DDL	Carrés moyens	F
Inter	12,76	2	6,38	0,55
Intra	896,97	78	11,50	
Total	909,73	80		

Réponses : Au seuil de 5%, $F_{crit}(2, 78) = 3.1$. La différence entre les groupes n'est donc pas significative. De plus, l'obtention d'un F_{obs} inférieur à 1 semblerait indiquer (sans pour autant le montrer) que les classes n'ont pas été constituées au hasard, mais qu'elles ont, au contraire, été rendues artificiellement homogènes : on a composé les trois classes de façon qu'elles soient de niveau équivalent.

Exercice 7

On reprend les données d'un exercice vu au premier semestre (dossier pedago).

Lors d'une expérience pédagogique, on s'intéresse à l'effet comparé de deux pédagogies des mathématiques chez deux groupes de 10 sujets :

- pédagogie traditionnelle (p_1)
- pédagogie moderne (p_2)

On note la performance à une épreuve de combinatoire.

p_1 traditionnelle		p_2 moderne	
s1	5.0	s11	4.0
s2	4.0	s12	5.5
s3	1.5	s13	4.5
s4	6.0	s14	6.5
s5	3.0	s15	4.5
s6	3.5	s16	5.5
s7	3.0	s17	1.0
s8	2.5	s18	2.0
s9	1.5	s19	4.5
s10	2.5	s20	4.5

1) Vérifier que les paramètres des deux échantillons sont donnés par :

	p_1	p_2
Moyenne	3.250	4.250
Ecart-type	1.365	1.553
Variance	1.863	2.413
Ecart-type corrigé	1.439	1.637
Variance corrigée	2.069	2.681

2) Ces données expérimentales permettent-elles d'affirmer que la pédagogie a un effet sur les résultats à l'épreuve de combinatoire ?

- a) Comparer les moyennes des deux groupes à l'aide d'une analyse de variance.
- b) Comparer les résultats avec ceux obtenus au premier semestre, à l'aide de la statistique T.

Réponses :

Les calculs intermédiaires sont résumés dans le tableau suivant :

	<i>Péda1</i>	<i>Péda2</i>	<i>Totaux</i>	
n_j	10	10	20	
T_j	32.5	42.5	75	281.25
Σx_{ij}^2	124.25	204.75	329	
T_j^2/n_j	105.625	180.625	286.25	
<i>Inter</i>	5.00			
<i>Total</i>	47.75			

Le tableau d'analyse de variance est donc :

Sources de variation	Sommes des carrés	DDL	Carrés moyens	F
<i>Inter</i>	5,0	1	5,0	2,11
<i>Intra</i>	42,75	18	2,375	
<i>Total</i>	47,75	19		

Au seuil de 5%, $F_{crit}(1, 18) = 4.41$. Hypothèse H_1 rejetée.

Comparaison possible avec l'exercice vu au premier semestre : $t_{obs}^2 = (-1.45)^2 = 2.10$, c'est-à-dire la valeur de F .

Enoncé 8 Données Bransford

On reprend une expérience de Bransford et al. (1972), dans laquelle on demande à des sujets d'écouter le texte suivant :

“Si les ballons éclatent, le son ne portera pas puisque tout sera bien trop loin du bon étage. Une fenêtre fermée empêchera également le son de porter, surtout depuis que les immeubles récents sont correctement isolés. Comme l'essentiel de l'opération dépend d'une arrivée correcte d'électricité, un fil cassé causerait bien des problèmes. Evidemment, le type peut hurler. Mais la voix humaine n'est pas assez puissante pour porter bien loin. Un problème supplémentaire serait qu'une corde casse sur l'instrument. Alors il serait impossible d'accompagner le message. C'est clair que la meilleure situation impliquerait la plus petite distance. Alors, il y aurait bien moins de problèmes potentiels. Avec un contact en face à face, un bien petit nombre de choses pourrait gêner.”

Le but visé par Bransford *et al.* est de montrer l'importance du contexte dans la compréhension et la mémorisation d'un texte. Pour ce faire, ils utilisent quatre groupes expérimentaux :

1. Un groupe “sans contexte” entend simplement le texte.
2. Le groupe “avec contexte avant” regarde une figure suggérant un contexte approprié pendant qu'il entend le texte.
3. Le groupe “avec contexte après” entend le texte puis regarde la figure précédente.
4. Le groupe “avec contexte partiel” regarde une figure suggérant un contexte inapproprié pendant qu'il entend le texte.

A proprement parler cette étude comprend un groupe expérimental (le groupe 2 : contexte pendant) et trois groupes contrôles (les groupes 1, 3 et 4). Les groupes contrôles doivent permettre d'éliminer des explications concurrentes (en particulier, effet facilitateur sur la mémoire de l'imagerie, de l'aspect concret du matériel, etc.). L'expérimentateur s'attend, donc, à observer une performance pour le groupe 2 supérieure aux trois autres groupes. Il choisit de mesurer le comportement des sujets par deux Variables Dépendantes : une note de compréhension donnée par les sujets (de 0 à 7, avec 0 indiquant l'incompréhension totale), et le nombre d'idées correctement rappelées (Bransford découpe le texte en 14 idées, essayez de les retrouver !). Quoique cette dernière Variable Dépendante soulève de délicats problèmes de codage (e.g., à partir de quel moment une idée est présente...), elle reflète clairement l'intérêt des auteurs de cette expérimentation.

Dans cette expérience, on utilise vingt sujets répartis en quatre groupes. Les résultats, pour la Variable Dépendante “nombre d'idées rappelées” (maximum 14) se trouvent ci-dessous (mais avant, faites ce que doit faire un bon expérimentateur : prenez une feuille et détaillez les cinq premières étapes du test statistique avant de partir à la pêche aux résultats) :

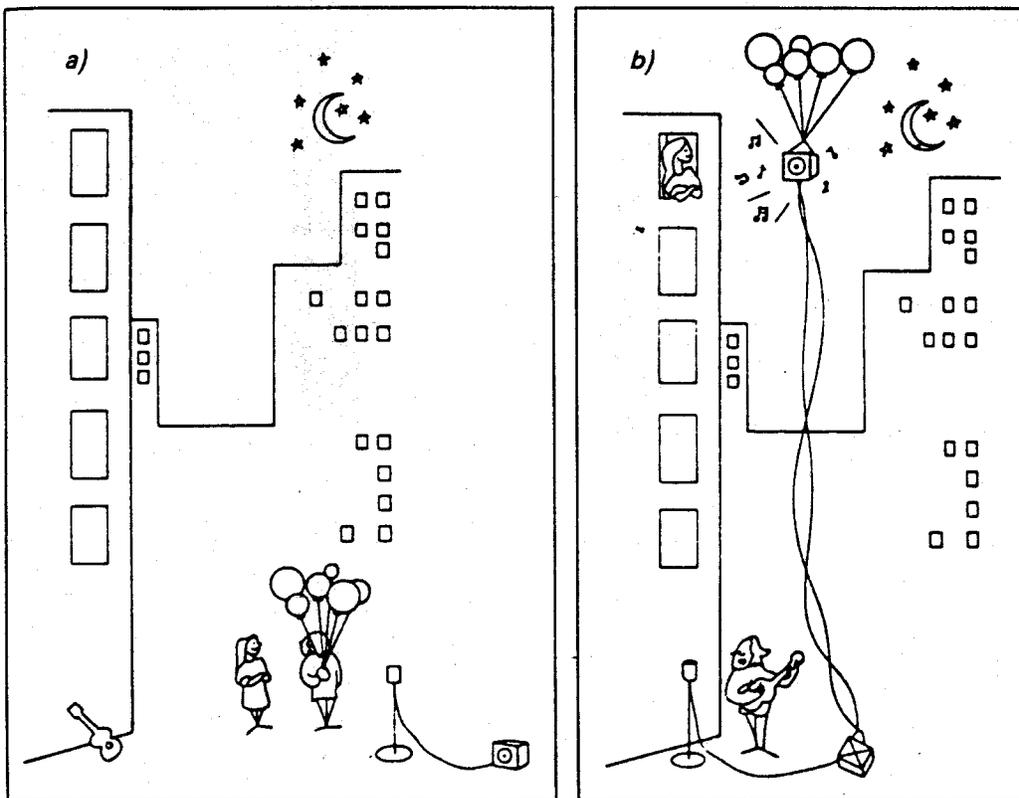


FIGURE 1 – Contexte inapproprié (a) et approprié (b) pour l'expérience de Bransford

Résultats de l'expérience				
	G.1	G.2	G.3	G.4
	3	5	2	5
	3	9	4	4
	2	8	5	3
	4	4	4	5
	3	9	1	4
T_j	15	35	16	21
n_j	5	5	5	5
$\frac{T_j}{n_j}$	3	7	3.2	4.2
$\sum x_{ij}^2$	47	267	62	91

Justifiez les calculs et le tableau d'ANOVA suivants :

Table d'ANOVA :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F > F_{cal})$
\mathcal{A}	3	50.95	16.98	7.22 **	.00288
$S(\mathcal{A})$	16	37.60	2.35		
Total	19	88.55			

Si on utilise la procédure des valeurs critiques :

** $F_{critique} = 5.29$, au seuil $\alpha = .01$; $F_{cal} > F_{critique}$. On rejette H_0 .

Les cinq étapes du test sont évidemment :

1. Formulation des hypothèses statistiques H_0 et H_1 . Ici :
 H_0 : dans les 4 conditions, les moyennes dans la population parente sont égales
 H_1 : les 4 moyennes ne sont pas toutes égales.
2. Choix du test : ici, une analyse de variance à un facteur. Statistique : F .
3. Distribution de la statistique de test : ici, le F de Fisher Snedecor avec $ddl_1 = 3$ (nombre de groupes - 1) et $ddl_2 = 16$ (nombre d'observations - nombre de groupes).
4. Seuil de signification choisi : ici, $\alpha = 1\%$.
5. Règle de décision : détermination des zones d'acceptation et de rejet de H_0 . Ici, :
 - Si $F_{cal} \leq 5.29$, on accepte H_0 (égalité des moyennes)
 - Si $F_{cal} > 5.29$, on refuse H_0 et on accepte H_1 .

L'étude pourrait être poursuivie à l'aide de la méthode des contrastes orthogonaux (que nous ne détaillerons pas).

La première étape consiste opposer le groupe 2 aux trois autres groupes en testant l'hypothèse nulle : $3\mu_2 = \mu_1 + \mu_3 + \mu_4$. On calcule : $L_1 = 3\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \bar{x}_3 - \bar{x}_4 = 10.6$;
 $\sum a_j^2 = 3^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 12$; $SC_{contraste1} = \frac{nL^2}{\sum a_j^2} = 46.81$

Dans la formule précédente, n est le nombre d'observations par groupe. Ici, $n = 5$. Le F de Fisher associé à ce contraste est obtenu en divisant $SC_{contraste1}$ par le carré moyen résiduel 2.35 ; il vaut 19.92. Les degrés de liberté sont 1 et 16. Le résultat est donc significatif d'un comportement du groupe 2 différent de celui des autres groupes.

La méthode peut être poursuivie en opposant le groupe 4 aux groupes 1 et 3 (coefficients appliqués aux quatre moyennes : 1, 0, 1, -2) puis en opposant les groupes 1 et 3 (coefficients appliqués : 1, 0, -1, 0).

Pourquoi s'agit-il de contrastes orthogonaux ?

Réponse : Les "vecteurs" associés aux coefficients des trois contrastes, à savoir $V_1 = (-1, 3, -1, -1)$, $V_2 = (1, 0, 1, -2)$, $V_3 = (1, 0, -1, 0)$ sont deux à deux orthogonaux (par exemple, $V_1 \cdot V_2 = -1 \times 1 + 3 \times 0 + (-1) \times 1 + (-1) \times (-2) = 0$), ce qui garantit l'indépendance des résultats des trois tests.

Une autre grandeur intéressante est le coefficient (souvent noté η^2) d'estimation de l'intensité de l'effet de la variable indépendante. Dans le cas d'une analyse de variance à un facteur, il est défini par :

$$\eta^2 = \frac{SC_{inter}}{SC_{total}}$$

Il vaut donc ici : $\eta^2 = 0.58 = 58\%$.

Signification : 58% de la variance de la Variable Dépendante est expliquée par la Variable Indépendante (les différentes conditions expérimentales).

η^2 est aussi le carré d'un coefficient de corrélation. η peut en effet être obtenu comme coefficient de la corrélation entre l'ensemble des données observées d'une part, et la série de données obtenue en remplaçant chaque observation par la moyenne de son groupe d'autre part. Sur notre exemple, soit U la série des données observées et V la série des données du modèle ainsi obtenu.

u_i	3	3	2	4	3	5	9	8	4	9	2	4	5	4	1	5	4	3	5	4
v_i	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	3.2	3.2	3.2	3.2	3.2	4.2	4.2	4.2	4.2	4.2

On obtient : $r(U, V) = 0.7585$ et $r^2(U, V) = 0.575$.

Enoncé 9 Données Loftus

Elisabeth Loftus (Loftus et Palmer 1974) — dans une série d'expérimentations sur le thème du témoignage — désire mettre en évidence l'influence de la tournure d'une question sur la réponse de témoins. Pour ce faire, elle montre à ses sujets, un film décrivant un accident de voiture. Elle pose, ensuite, une série de questions aux sujets. Parmi celles-ci se trouve une des cinq versions d'une question relative à la vitesse des véhicules. Voici ces versions :

- 1) **HIT** : About how fast were the cars going when they *hit* each other? (A environ quelle vitesse allaient les voitures quand elles se sont "percutées").
- 2) **SMASH** : About how fast were the cars going when they *smashed* each other? (To smash : écraser, heurter avec violence).
- 3) **COLLIDE** : About how fast were the cars going when they *collided* each other? (To collide : entrer en collision, s'emboutir).
- 4) **BUMP** : About how fast were the cars going when they *bumped* each other? (To bump : cogner, frapper).
- 5) **CONTACT** : About how fast were the cars going when they *contacted* each other? (To contact : entrer en contact).

Les sujets répondaient en indiquant une vitesse exprimée en miles (nous sommes aux U.S.A). Voici les résultats obtenus (lors d'une réplique de l'expérience) :

HIT	SMASH	COLLIDE	BUMP	CONTACT
22	38	43	47	27
29	40	39	29	24
33	50	32	58	46
50	45	44	34	37
19	48	29	36	31
37	56	44	43	37
33	52	45	25	34
43	47	33	58	18
40	39	48	24	28
34	40	37	31	26

Après avoir identifié les variables dépendante(s) et indépendante(s), vous tirerez les conclusions de cette expérimentation.

Pour vous aider voici quelques statistiques pour chaque groupe :

	T_j	T_j/n_j	T_j^2/n_j	$\sum_j x_{ij}^2$
Gr. 1	340	34.0	11560	12338
Gr. 2	455	45.5	20702.5	21043
Gr. 3	394	39.4	15523.6	15894
Gr. 4	385	38.5	14822.5	16241
Gr. 5	308	30.8	9486.4	10060
Total	1882		72095	75576

La Variable Dépendante est évidemment la vitesse exprimée en miles. La Variable Indépendante est le type de verbe utilisé pour poser la question sur la vitesse des voitures.

Manifestement, E. Loftus veut montrer que les “sous-entendus” des verbes sont pris en compte par les sujets dans leur décision sur la vitesse (e.g., les sujets utilisent la signification implicite des verbes comme une source d’information). Le point d’importance dans cette expérience est de remarquer que E. Loftus désire généraliser ses résultats à l’ensemble des verbes signifiant quelque chose comme “entrer en contact”. Quoiqu’elle n’ait pas, à proprement parler, sélectionné ses verbes au hasard, elle les juge représentatifs de l’ensemble des verbes de mouvement. Le problème ici est de décider si le facteur expérimental est fixé ou aléatoire. Si l’on admet que les verbes choisis par Loftus représentent un échantillon représentatif, on décidera que le facteur est aléatoire (cf. La polémique initiée par Clark 1973). Si l’on juge que les modalités sont choisies en fait arbitrairement, on décidera que le facteur est fixé, et les conclusions de l’étude se restreignent aux modalités effectivement présentes dans l’expérimentation. Quelle que soit la décision prise, elle sera criticable.

Ici, le distinguo entre facteur fixé et aléatoire peut paraître sans importance car la décision (rejet ou non de l’hypothèse nulle) sera identique dans les deux cas. *Ce ne sera plus le cas dans des plans d’expérience plus complexes.* En fait, l’essentiel de l’argument de Clark (1973) est de montrer qu’une partie des recherches utilisant du matériel linguistique aboutit à des conclusions SCIENTIFIQUES erronées du fait de la confusion entre facteurs fixés et aléatoires (cf. aussi les réponses de Wike et Church 1976). Clark défend l’idée qu’une partie des conclusions de la psychologie du langage est invalide pour avoir cru que des facteurs aléatoires étaient fixes. A cette attaque répond Chastaing (1986) qui démontre méthodologiquement qu’une autre partie de la psychologie du langage est invalide d’avoir cru que des facteurs fixes étaient aléatoires!

Dans le cas présent, le choix entre les deux modèles n’a pas d’influence sur les résultats de l’analyse statistique : on aboutit à des conclusions statistiques identiques (mais pas à des interprétations psychologiques identiques!). L’analyse de variance permet de conclure en tout cas à un effet sur la vitesse estimée, du type le verbe utilisé pour poser la question. On obtient le tableau d’analyse de variance suivant :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F > F_{cal})$
Expérimentale	4	1256.52	314.13	4.06 **	.0069
Erreur	45	3481.00	77.36		
Total	49	4737.52			

Ainsi, le type de verbe employé pour interroger les sujets sur la vitesse des véhicules, influence l’estimation qu’ils donnent ($F_{cal}(4, 45) = 4.06$, $p < .05$). On remarque la vitesse élevée induite par *to smash*. Nous pourrions poursuivre cet exemple en essayant d’apprécier les différences entre ces différents verbes les uns par rapport aux autres).

Enoncé 10 *Données Besançon*

On fait subir à 30 élèves d’une école de Besançon une épreuve de “précision perceptive” qui consiste à évaluer un nombre de points sur une diapositive projetée pendant un temps relativement court (une demi-seconde). Les auteurs de cette expérience pensent que la présence d’un témoin peut influencer la performance des sujets dans cette tâche perceptive. Pour vérifier cette idée, les expérimentateurs divisent leur échantillon en trois groupes — chaque enfant étant affecté à un groupe en utilisant une “table de nombres au hasard”. Dans le premier groupe (A1) l’expérience est effectuée sans témoin ; dans le second groupe

(A2) l'enfant accomplit sa tâche en compagnie d'un témoin présenté par l'expérimentateur comme un spécialiste; dans le troisième groupe (A3), le témoin est présenté comme un simple curieux. On répète — pour chaque sujet — vingt-cinq fois l'expérience. Et l'on retient pour chaque sujet la moyenne des écarts absolus (i.e. en ignorant le signe) entre l'estimation fournie et le nombre exact de points.

Les expérimentateurs s'attendent à trouver des différences entre les trois conditions expérimentales; mais, plus précisément, entre la condition "sans témoin" et la condition "témoin simple curieux" (cette différence leur permettrait de contredire un de leurs collègues qui avançait dans une expérience voisine que le témoin n'agissait que parce que les enfants le jugeait spécialiste). Les auteurs veulent, également vérifier l'existence d'un effet spécifique à la condition "témoin spécialiste".

Questions :

Pourquoi les expérimentateurs décident-ils de prendre l'écart absolu et non pas — par exemple — l'écart relatif. Tout de même, pourquoi retiennent-ils la moyenne des vingt-cinq essais, plutôt qu'un seul essai ?

Quelle est la (les) variable(s) indépendante(s), la (les) variable(s) dépendante(s) ?

Après avoir traduit en termes statistiques les objectifs des expérimentateurs, peut-on penser que ces objectifs sont atteints ? Voici les résultats obtenus :

Condition A1	140	124	118	115	110	110	108	104	102	90
Condition A2	170	164	161	158	156	148	143	140	130	126
Condition A3	136	120	112	104	102	96	92	84	81	75

Éléments de réponses. Calculs intermédiaires :

	<i>A1</i>	<i>A2</i>	<i>A3</i>	<i>Totaux</i>	
n_j	10	10	10	30	
T_j	1121	1496	1002	3619	436572.03
Σx_{ij}^2	127303	225746	103582	456637	
T_j^2/n_j	125664.1	223801.6	100400.4	449866.1	
<i>Inter</i>	13294.07				
<i>Total</i>	20064.97				

Le tableau d'analyse de variance est donné par :

<i>Source</i>	<i>ddl</i>	<i>SC</i>	<i>CM</i>	<i>F_{cal}</i>
<i>Inter-groupes</i>	2	13294.1	6647.03	26.51 **
<i>Intra-groupes</i>	27	6770.9	250.77	
<i>Total</i>	29	20065		

Les trois groupes ne sont donc pas équivalents. La méthode peut être poursuivie en décomposant la variation intra-groupes selon les deux contrastes orthogonaux suggérés par l'énoncé :

$$L_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 11.9$$

$$L_2 = 2\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 86.9$$

On obtient alors :

$$SC_{\text{contraste1}} = 708.05; F = 2.82; Pr(F) = 0.10$$

$$SC_{\text{contraste2}} = 12586.02; F = 50.19; Pr(F) = 1.3 \times 10^{-7}$$

L'expérience ne met donc pas de différence en évidence entre les conditions "sans témoins" et "témoin simple curieux" mais par contre, montre un comportement différent dans la condition "témoin spécialiste".

Enoncé 11

Un chercheur a soumis quatre groupes de cinq élèves à un apprentissage de "résolutions de problèmes mathématiques". Chaque groupe apprend avec une méthode pédagogique propre : le premier avec une méthode uniquement verbale, le second avec une méthode écrite, le troisième avec un schéma annoté, le quatrième avec une série de schémas annotés. L'apprentissage dure une heure pour chaque groupe, et le même contenu est présent. Deux jours après l'apprentissage, les sujets sont soumis à un test de raisonnement mathématique. Ce test provient des travaux d'autres chercheurs qui ont étalonné ce test sur une population comparable à celle dont provient l'échantillon d'enfants utilisé ici ; le résultat de ce test est une note (de 0 à 35 : plus la note est élevée, meilleur est le résultat).

Quelle est la Variable Indépendante, la Variable Dépendante ? Comment l'expérimentateur traitera-t-il les résultats de son expérience (souvenez-vous qu'il faut pouvoir répondre à cette question avant de recueillir les résultats !) ?

En outre, l'auteur a mis au point cette expérience pour vérifier certaines hypothèses précises :

1. La méthode verbale diffère-t-elle de l'ensemble des autres méthodes
2. La méthode écrite diffère-t-elle des méthodes avec schémas (un ou plusieurs) ?
3. Le nombre de schémas a-t-il une influence décelable sur la performance ?

L'auteur peut-il répondre simultanément à ces différentes questions, et quelles seront les réponses ? Interprétez — en vous justifiant — les résultats obtenus et concluez.

Voici les résultats :

GROUPE EXPÉRIMENTAL			
A1	A2	A3	A4
6	14	22	23
13	10	11	19
16	14	19	25
14	19	19	24
14	25	23	25

Elements de réponses. Calculs intermédiaires :

	A1	A2	A3	A4	Totaux	
n_j	5	5	5	5	20	
T_j	63	82	94	116	355	6301.25
Σx_{ij}^2	853	1478	1856	2716	6903	
T_j^2/n_j	793.8	1344.8	1767.2	2691.2	6597	
Inter					295.75	
Total					601.75	

Le tableau d'analyse de variance est donné par :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F > F_{cal})$
Inter-groupes	3	295.75	98.58	5.15	0.011
Intra-groupes	16	306	19.125		
Total	19	601.75			

La méthode peut être poursuivie en décomposant la variation inter-groupes selon les trois contrastes orthogonaux suggérés par l'énoncé :

$$L_1 = 3\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3 - \bar{x}_4 = -20.6$$

$$L_2 = 2\bar{x}_2 - \bar{x}_3 - \bar{x}_4 = -9.2$$

$$L_3 = \bar{x}_3 - \bar{x}_4 = -4.4$$

On obtient alors :

$$SC_{\text{contraste1}} = 176.82; F = 9.24; Pr(F) = 0.0067$$

$$SC_{\text{contraste2}} = 70.53; F = 3.69; Pr(F) = 0.07$$

$$SC_{\text{contraste3}} = 48.40; F = 2.53; Pr(F) = 0.13$$

Exercice 12

Ci-dessous figure un extrait d'un ouvrage de statistiques relatif à un test statistique qui n'a pas été étudié en cours, le test H de Kruskal et Wallis.

Liaison entre un caractère quantitatif et un caractère qualitatif à k classes ($k > 2$).

C'est le problème appelé, dans les chapitres précédents, "comparaison de plusieurs moyennes" et traité par analyse de variance. Le test non paramétrique correspondant le plus usuel est le test H de Kruskal et Wallis.

On classe les observations de l'ensemble des k séries, comme on le faisait pour les deux séries dans les tests précédents, puis on calcule les rangs moyens $\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_k$ et le rang moyen \bar{W} , ce dernier valant $\frac{N+1}{2}$ si N représente le nombre total d'observations.

Dans l'hypothèse nulle, $\bar{W}_1, \bar{W}_2, \dots, \bar{W}_k$ ne doivent pas trop s'écarter de \bar{W} , de sorte que les quantités $(\bar{W}_i - \bar{W})^2$ ne doivent pas être trop grandes. On montre que, sous l'hypothèse nulle, la statistique :

$$H = \frac{1}{N} \frac{\sum n_i (\bar{W}_i - \bar{W})^2}{(N+1)/12}$$

suit approximativement une loi du χ^2 à $k - 1$ degrés de liberté.

Dans cette expression, les n_i désignent les effectifs des diverses séries. L'approximation n'est valable que s'ils atteignent tous la dizaine, à la rigueur 5.

1) Dans quelles situations ce test doit-il être préféré à une analyse de variance ?

2) *Première application.* Une variable \mathcal{A} comporte trois modalités a_1, a_2, a_3 . Pour chaque modalité, on dispose de 2 ou 3 observations d'une variable numérique. Ces observations sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

a_1	a_2	a_3
14	12	14
16	15	18
13		14

Construire sur cet exemple le protocole des rangs (W_i) et calculer les rangs moyens et la statistique H . (Vu le faible nombre d'observations, on s'abstiendra ici d'effectuer le test).

3) *Deuxième application.* Afin de constituer un groupe suffisamment important en vue d'une recherche, un chercheur teste 3 groupes de 10 sujets. Les rangs moyens observés sur

les trois groupes sont les suivants :

$$\bar{W}_1 = 9,8 ; \bar{W}_2 = 24,05 ; \bar{W}_3 = 12,65.$$

Peut-on considérer que les trois groupes testés sont issus d'une même population ?

Réponses : 1) *Un test non paramétrique doit être préféré lorsque la variable est ordinale, ou lorsque l'on ne peut pas faire d'hypothèse concernant la normalité des distributions dans les populations parentes.*

2) *Le protocole des rangs est donné par :*

a_1	a_2	a_3
4	1	4
7	6	8
2		4
4.33	3.5	5.33

Dans ce cas, $\bar{W} = \frac{36}{8}$; $H = \frac{1}{8} \frac{3(4.33-4.5)^2 + 2(3.5-4.5)^2 + 3(5.33-4.5)^2}{9/12} = 0.6944$

3) *Dans ce cas, $H_{obs} = 14.67$, $ddl = 2$ et, au seuil de 1%, $\chi_c^2 = 9.21$. On conclut donc à l'hétérogénéité des groupes.*

Plans d'expériences, interactions

Enoncé 13

Déterminez VI et VD dans les hypothèses suivantes :

- a) Un individu est d'autant plus attaché à une opinion qu'il s'est davantage engagé à la défendre.
- b) Le degré de violence d'un événement modifie sa mémorisation.
- c) Je l'aime plus qu'hier et bien moins que demain.
- d) Les individus agressifs assurent plus souvent le leadership dans un groupe, mais ils en satisfont moins les membres que les leaders non agressifs.
- e) On retient plus facilement un matériel significatif qu'un matériel dépourvu de sens.
- f) C'est dans les vieux pots que l'on fait les meilleures confitures.
- g) On restitue d'autant mieux une information que celle-ci est rappelée dans le même contexte que celui où elle a été apprise.
- h) Les aînés sont plus anxieux que les puînés.
- i) L'influence d'un discours est d'autant plus importante que l'orateur possède du prestige.
- j) Le nombre de conversations au cours d'un repas dépend étroitement de la disposition des individus autour de la table.

Indications de réponses : a) VI = intensité de l'engagement, VD = une mesure numérique liée à l'attachement à l'opinion.

b) VI = degré de violence d'un événement, VD = mesure numérique liée à la mémorisation de l'événement.

c) VI = Date, VD = mesure du degré d'amour.

d) Ici, deux hypothèses combinées :

VI = agressivité, VD liée à la prise de leadership

VI = agressivité, VD = mesure de la satisfaction des membres du groupe.

e) VI = significativité du matériel, VD = évaluation numérique de la performance mnésique.

f) VI = âge du pot, VD = mesure de la qualité de la confiture.

g) VI1 = contexte d'apprentissage, VI2 = contexte de rappel (ou lien (même / différent) entre contexte de rappel et contexte d'apprentissage), VD = évaluation numérique de la performance mnésique.

h) VI = rang de naissance, VD = mesure de l'anxiété.

i) VI = prestige de l'orateur, VD = mesure du degré d'influence.

j) VI = disposition autour de la table, VD = nombre de conversations.

Enoncé 14 Données Schizo

Dans une série d'expériences destinées à éclaircir la notion de "maladie mentale" on soumet des sujets diagnostiqués comme schizophrènes et des sujets normaux à une épreuve de "formation de concept". Tous les sujets retenus pour participer à l'expérience doivent posséder un Q.I. compris entre 100 et 105. Pourquoi ?

On compte pour chaque sujet le nombre d'essais nécessaires pour arriver à former un nouveau concept.

Dans cette expérience on utilise deux ensembles de stimuli : Le premier contient des images illustrant l'approbation sociale, le second des images illustrant la désapprobation sociale. L'auteur de cette expérience émet les prédictions suivantes (qui découlent de certaines théories de la personnalité et des performances intellectuelles) :

- a) Les sujets normaux devront arriver plus rapidement que les schizophrènes à accomplir l'épreuve et ce, indépendamment de la nature des images ;

- b) Les sujets normaux ne seront pas influencés par la nature des stimuli ;
 c) Les schizophrènes devront réussir moins facilement les épreuves comportant des images exprimant la désapprobation sociale que les épreuves décrivant l'approbation sociale.
 Quel est le plan d'expérience utilisé ? Les prédictions du chercheur se traduisent par des prédictions sur les hypothèses statistiques, lesquelles ?

*Éléments de réponses : Facteurs : sujet \mathcal{S} , maladie \mathcal{M}_2 , nature des images \mathcal{I}_2 . L'effet du facteur QI a été éliminé par le choix initial des sujets. Plan : $\mathcal{S} < \mathcal{M}_2 > * \mathcal{I}_2$. La combinaison des hypothèses a) et c) se traduit par une interaction : les sujets réussiront moins facilement que les sujets normaux, mais cette différence sera plus marquée dans la condition i_2 que dans la condition i_1 .*

Énoncé 15

Une expérience a été menée en utilisant un plan de la forme $\mathcal{S}_8 < \mathcal{A}_3 * \mathcal{B}_2 > * \mathcal{C}_4$.

- 1) a) Combien de groupes indépendants de sujets a-t-on constitué ?
- b) Combien de sujets différents ont été utilisés pour cette expérience ?
- c) Combien d'observations différentes d'un même sujet a-t-on effectué ?
- 2) a) Dériver ce plan d'expérience et donner les différentes sources de variation.
- b) Proposer un modèle de score.

*Réponses : 1) a) Les sujets sont emboîtés dans $< \mathcal{A}_3 * \mathcal{B}_2 >$. On a 6 combinaisons de modalités et donc 6 groupes de sujets.*

*b) L'indice dans $\mathcal{S}_8 < \mathcal{A} * \mathcal{B} >$ montre qu'il y a 8 sujets dans chaque groupe, soit en tout : $6 \times 8 = 48$ sujets.*

c) Les sujets sont croisés avec \mathcal{C}_4 , on a donc fait 4 observations de chaque sujet.

2) a) Les facteurs élémentaires sont ici : $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{S}(\mathcal{A}\mathcal{B})$.

Termes d'interaction d'ordre 1 : $\mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{C}, \mathcal{B}\mathcal{C}, \mathcal{C}\mathcal{S}(\mathcal{A}\mathcal{B})$.

Terme d'interaction d'ordre 2 : $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}$.

b) Le modèle de score peut s'écrire :

$$Y_{abcs} = \mu + \alpha_a + \beta_b + \gamma_c + s_{s(ab)} + \alpha\beta_{ab} + \alpha\gamma_{ac} + \beta\gamma_{bc} + \gamma s_{cs(ab)} + \alpha\beta\gamma + e_{cs(ab)}$$

Énoncé 16

Dans une tâche de dénomination de figures géométriques, l'auteur étudie l'évolution du temps de réaction verbale en fonction de la discriminabilité des figures.

Dans un premier temps, on présente aux sujets une série de figures. Pour la moitié d'entre eux, la série est constituée de 2 figures, pour l'autre moitié, de 4 figures. Dans chacun des cas, la série est constituée soit de figures facilement discriminables (triangle, carré, ...) soit de figures plus complexes (octogone, décagone, ...).

Dans un deuxième temps, on demande à chaque sujet de nommer une figure tirée au hasard dans la série précédente et on mesure le temps de réaction verbale du sujet.

48 sujets répartis en 4 groupes de 12 ont participé à l'expérience.

Les moyennes des temps de réaction mesurés en millisecondes observés sur chacun des quatre groupes sont indiqués dans le tableau suivant :

Incertitude	Discriminabilité	
	Forte	Faible
2 figures	460	510
4 figures	559	864

- 1) Définir la variable dépendante et les variables indépendantes prises en compte. Quel est le plan d'expérience utilisé ?

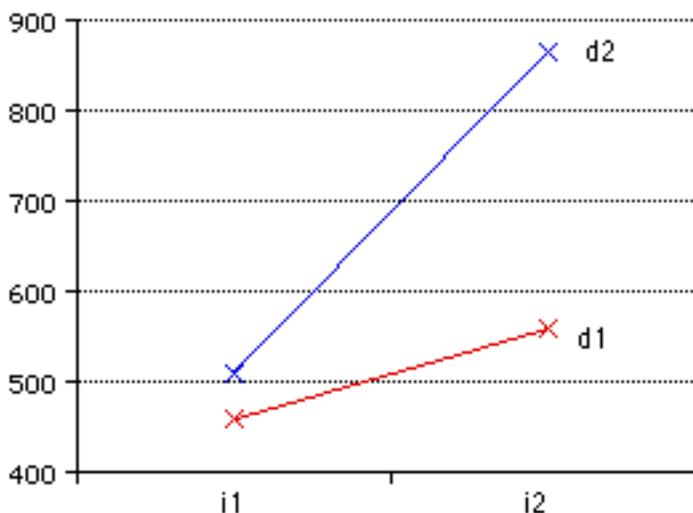
2) Au vu du tableau précédent, indiquer s'il semble y avoir une interaction entre les deux facteurs étudiés. Construire un graphe d'interaction. Commenter ce graphe en rédigeant une phrase exprimant comment se traduit l'effet d'interaction.

3) a) Dériver ce plan d'expérience et donner les différentes sources de variation.

b) Proposer un modèle de score.

*Éléments de réponses : 1) Le plan utilisé est ici $\mathcal{S}_{12} < \mathcal{I}_2 * \mathcal{D}_2 >$.*

2) Le temps de réaction augmente lorsque la discriminabilité est plus faible. Mais cet effet est d'autant plus important que l'incertitude est élevé.



3) a) Les facteurs élémentaires sont ici : \mathcal{D} , \mathcal{I} , $\mathcal{S}(\mathcal{DI})$.

Terme d'interaction d'ordre 1 : \mathcal{DI} .

b) Le modèle de score peut s'écrire : $Y_{dis} = \mu + \delta_d + \iota_i + \delta\iota_{di} + s_s(di)$.

Énoncé 17 Données Conrad

Dans une reprise d'une expérience de Conrad (1971), on veut mettre en évidence l'hypothèse de recherche suivante : "les enfants jeunes n'utilisent pas un codage phonologique en mémoire à court terme". Pour ce faire, on sélectionne cinq enfants de 5 ans et 5 enfants de 12 ans (Variable \mathcal{A} , avec deux modalités). On montre à chaque enfant un certain nombre de paires d'images représentant des objets dont on s'est assuré auparavant qu'ils sont nommés d'une seule manière par les enfants. On montre les images aux enfants. Puis on retourne les images (les enfants ne voient plus que le dos des images). Ensuite, on donne aux enfants une paire d'images identiques à celles retournées. Enfin, on leur demande de placer ces nouvelles images comme les images retournées sur la table. Pour la moitié des paires d'images les noms des objets se ressemblent (e.g., noix et doigt). Pour l'autre moitié, les noms des objets ne se ressemblent pas (e.g., maison et cheval). Conrad prédit que les enfants les plus vieux réussiront dans l'ensemble mieux que les enfants les plus jeunes, mais également que les enfants les plus vieux utiliseront un codage phonologique comme mnémonique (i.e., "la parole intérieure"). De ce fait, les enfants les plus vieux devront commettre plus d'erreurs lorsque les noms se ressemblent acoustiquement que lorsque les noms diffèrent. On présente à chaque enfant cinquante paires d'images correspondant à la modalité b_1 (dissemblance acoustique), et cinquante paires d'images correspondant à la modalité b_2 (ressemblance acoustique) ; la Variable Dépendante choisie est le nombre de paires d'images correctement reconstituées. L'ordre de présentation est "aléatorisé" pour chaque passation (Pourquoi cette précaution ?).

Essayer de traduire l'hypothèse de recherche en prédiction sur les sources de variation de l'analyse de variance.

Vous avez dû conclure que, d'une part, on s'attend à un effet principal de l'âge (qui est trivial), et, d'autre part, à un effet d'interaction : c'est le point d'importance, ou si vous préférez, le point crucial de la théorie. On retrouve, ici, le rôle essentiel de l'interaction "comme test de théorie".

Enoncé 18 Données Cochran

Les données suivantes, adaptées d'une expérience de Cochran et Cox, illustrent un paradigme expérimental extrêmement courant : la comparaison de deux conditions avec contrebalancement des ordres.

Il s'agissait de comparer l'efficacité de deux types de machines à calculer m1 et m2 : on supposera ici que 10 sujets, s1 à s10, ont exécuté la même séquence de calculs, successivement sur chacune des deux machines m1 et m2. Les sujets s1 à s5 ont travaillé d'abord (essai e1) avec la machine m1, puis (essai e2) avec la machine m2 ; les sujets s6 à s10 ont travaillé dans l'ordre inverse (m2 à l'essai e1, puis m1 à l'essai e2). Les résultats (temps d'exécution du calcul, en unités conventionnelles) sont les suivants :

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10
m1	30	22	29	12	23	21	22	18	16	23
m2	14	5	17	14	8	21	13	13	7	24

Comme facteurs décrivant le protocole, nous prendrons d'abord : S (sujets : dix modalités, s1 à s10) ; M ou M2 (Machines : deux modalités m1 et m2) ; E ou E2 (essais : deux modalités e1 et e2). A ce facteur nous adjoindrons, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, le facteur ordre O ou O2 avec :

o1 : machine m1 passée à l'essai e1 et machine m2 passée à l'essai e2 ;

o2 : machine m2 passée à l'essai e1 et machine m1 passée à l'essai e2 ;

N.B. : le tableau précédent correspond à la description des données selon le plan S*M2
Mais on pourrait également présenter ces données selon le tableau suivant :

	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10
e1	30	22	29	12	23	21	13	13	7	24
e2	14	5	17	14	8	21	22	18	16	23

Ce nouveau tableau correspondrait à la description selon le plan S*E2.

En introduisant le facteur ordre, ces mêmes données pourront encore être décrites selon l'un des plans S<O2>*M2 et S<O2 >*E2

Question principale : y a-t-il une différence d'efficacité entre les machines ? Question secondaire : y a-t-il une différence entre les deux essais ?

Du point de vue des objectifs de la recherche, le facteur Machine sera donc considéré comme principal, et le facteur Essai comme secondaire (ce qui n'implique nullement que, lors de la planification de l'expérience, on s'attendait à ce que l'effet du facteur Essai soit peu important ; les deux ordres ont été contrebalancés précisément afin de parer à l'éventualité d'un effet même important du facteur Essai).

Réponses : Il faut ici bien comprendre que le facteur "essai" représente l'interaction entre les facteurs "machine" et "ordre" ; de même, le facteur "machine" représente l'interaction entre les facteurs "ordre" et "essai".

L'analyse, au niveau descriptif, de l'interaction entre les facteurs "ordre" et "essai" (c'est-à-dire l'analyse de l'effet "machine") pourra être faite à partir du tableau suivant obtenu à partir des moyennes calculées dans chacune des conditions $e_1o_1, e_1o_2, e_2o_1, e_2o_2$:

	o_1	o_2	Moy.	Diff.
e_1	23.2	15.6	19.4	7.6
e_2	11.6	20.0	15.8	-8.4
Moy.	17.4	17.8	17.6	-0.4
Diff.	11.6	-4.4	3.6	16

Dans ce tableau, 3.6 représente deux fois l'effet "essai", 16 représente deux fois l'effet "machine". L'interaction apparaît clairement sur un graphe d'interaction.

On pourra répondre aux deux questions posées à l'aide de comparaisons de moyennes sur des groupes appariés, en ignorant le troisième facteur. La comparaison des moyennes obtenues pour $M = m_1$ et $M = m_2$ aboutit à $T_{obs} = 3.52$, valeur significative d'une différence entre machines au seuil de 1%. La comparaison des moyennes obtenues pour $E = e_1$ et $E = e_2$ aboutit à $T_{obs} = 1.09$. La différence n'est donc pas significative. L'analyse de variance permet ici une étude plus fine. Mais, le tableau d'analyse de variance est assez complexe, car il s'agit d'un plan à mesures partiellement répétées (sujets emboîtés dans un facteur et croisés avec l'autre facteur). On obtient par exemple :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	Pr
O	1	0.8	0.8	0.018	0.89
$S < O >$	8	357	44.6		
E	1	64.8	64.8	3.08	0.11
Interaction	1	320	320	15.2	0.0045
Résidu	8	168.2	21.02		
Total	19	910.8			

On voit que l'effet du facteur "essai" est peu significatif (niveau de significativité de 11%) alors que l'interaction (c'est-à-dire l'effet du facteur "machine") est quant à lui très significatif. Notez que ce tableau pourrait tout aussi bien être donné sous la forme suivante :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	Pr
O	1	0.8	0.8	0.018	0.89
$S < O >$	8	357	44.6		
M	1	320	320	15.2	0.0045
Interaction	1	64.8	64.8	3.08	0.11
Résidu	8	168.2	21.02		
Total	19	910.8			

Plans $S * A$

Enoncé 19 Données pharma

Dans une expérimentation de psychopharmacologie, on veut vérifier l'effet de deux drogues de type "amphétamines" sur le temps de réaction à une épreuve de psychomotricité. Afin de contrôler une source possible de perturbations, on décide de prendre les six mêmes

sujets exposés à trois traitements expérimentaux différents : Drogue A, Drogue B, Placebo. L'expérimentation est construite en "double aveugle". La variable dépendante sera le temps de réaction mesuré en ms.

Mais, avant tout, remplissez les six étapes du test :

1. Hypothèses Statistiques.
2. Choix du test.
3. Distribution d'échantillonnage.
4. Seuil de Signification.
5. Région de Rejet et Règle de décision.
6. Résultats et décision.

Voici les résultats :

Sujets	Condition expérimentale			Total
	Drogue A	Placebo	Drogue B	
s_1	165	231	217	613
s_2	172	219	217	608
s_3	109	199	243	551
s_4	197	219	160	576
s_5	199	247	162	608
s_6	193	245	191	629
Total	1035	1360	1190	3585

$$\begin{aligned}
 Q1 &= 165 + 172 + \dots + 191 = 3585 \\
 Q2 &= 165^2 + \dots + 191^2 = 735819 \\
 Q3 &= (1035^2 + \dots + 1190^2)/6 = 722820.8 \\
 Q4 &= (613^2 + \dots + 629^2)/3 = 715371.7 \\
 Q5 &= 3585^2/18 = 714012.5 \\
 Q6 &= SC_T = Q2 - Q5 = 21806.5 \\
 Q7 &= SC_A = Q3 - Q5 = 8808.3 \\
 Q8 &= SC_S = Q4 - Q5 = 1359.2 \\
 Q9 &= SC_{AS} = Q2 - Q4 - Q3 + Q5 = 11639
 \end{aligned}$$

Tableau d'ANOVA

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F_{cal})$
\mathcal{A}	2	8808.3	4404.15	3.784	.0592
\mathcal{S}	5	1359.2	271.84		
\mathcal{AS}	10	11639.0	1163.90		
Total	17	21806.5			

Avec la procédure des valeurs critiques : $F_{critique} = 4.10$ (avec $\nu_1 = 2, \nu_2 = 10$ au seuil $\alpha = .05$). $F_{cal} < F_{critique}$ on ne peut pas rejeter H_0 .

Enoncé 20 *Données Inhibit*

Dans une expérimentation sur l'inhibition proactive, des sujets apprennent une liste de dix paires de mots, puis doivent se rappeler ces paires deux jours plus tard. Après le rappel, les sujets doivent apprendre une deuxième liste de dix paires dont ils devront se rappeler deux jours plus tard, le rappel de la deuxième liste est suivie de l'apprentissage d'une

troisième, etc., jusqu'à la sixième liste. La variable indépendante sera la position ordinale de la liste (e.g., première, seconde, ..., sixième). La variable dépendante sera le nombre de paires correctement rappelées. Les auteurs de l'expérience prédisent que le rappel se détériorera à mesure que l'on progresse dans la position ordinale (prédiction qui traduit simplement l'effet de l'inhibition proactive...).

Voici les résultats :

Sujet	Position ordinale de la liste						Total
	1	2	3	4	5	6	
s_1	17	13	12	12	11	11	76
s_2	14	18	13	18	11	12	86
s_3	17	16	13	11	15	14	86
s_4	18	16	11	10	12	10	77
s_5	17	12	13	10	11	13	76
s_6	16	13	13	11	11	11	75
s_7	14	12	10	10	10	10	66
s_8	16	17	15	11	13	11	83
	129	117	100	93	94	92	625

Justifier le tableau d'ANOVA suivant :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F_{cal})$
\mathcal{A}	5	146.85	29.37	10.32**	.000005
\mathcal{S}	7	52.48	7.50		
\mathcal{AS}	35	99.65	2.85		
Total	47	298.98			

Enoncé 21 Données Ecoute

On brouille l'écoute

Dans une étude sur l'effet du bruit sur la discrimination perceptive, on utilise six sujets. On mesure pour chaque sujet le nombre d'erreurs commises dans une tâche de discrimination perceptive. Les sujets sont soumis à trois conditions. Dans la première, les sujets accomplissent la tâche en l'absence de bruit ; dans la seconde, le bruit est présenté de façon intermittente (i.e., bruits d'avions) ; dans la dernière, le bruit est présenté de façon continue (bruits de "marteau piqueur") On obtient les résultats suivants :

Sujets	Absence de bruit	Bruit intermittent	Bruit continu
1	117	119	127
2	130	126	131
3	122	118	129
4	123	117	134
5	126	120	137
6	116	120	128

Après avoir identifié la ou les variable(s) indépendante(s), dépendante(s), vous répondrez à la question — classique — :

“La (ou les) Variable(s) Indépendante(s) influe(nt) elle(s) sur la (les) Variable(s) Dépendante(s) ?”

La condition “absence de bruit” diffère-t-elle des conditions “avec bruit” (qu’il soit continu ou intermittent) ?

Les deux conditions “avec bruit” sont elles équivalentes ?

Au vu des résultats, le chercheur remarque la moyenne obtenue dans la condition “bruit intermittent”. Il voudrait savoir si cette valeur diffère de la condition “témoin”. Comment répondra-t-il à cette question ? Et quelle sera la réponse ?

Réponses. Le tableau d’analyse de variance est donné par :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F_{cal})$
Bruit	2	403.11	201.56	19.98**	.0003
Sujets	5	164.44	32.89		
Résidu	10	100.89	10.09		
Total	17	668.44			

On peut comparer la condition “absence de bruit” aux deux autres conditions en calculant $L_1 = 2\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \bar{x}_3$ (méthode des contrastes orthogonaux, cf. exercice 8). On peut aussi comparer la moyenne de ce protocole dérivé à 0. On obtient alors $\bar{x} = -6.33$ et $s_c = 6.74$ d’où $t_{obs} = -2.30$. Le résultat n’est pas significatif d’une différence dans le cas d’un test bilatéral au seuil de 5%. Il l’est dans le cas d’un test unilatéral.

On peut comparer les deux conditions “avec bruit” à l’aide d’un test de comparaison de moyennes sur groupes appariés. Le protocole dérivé des différences individuelles a une moyenne de 11.0, et un écart type corrigé de 5.02. D’où $t_{obs} = 5.37$. On conclut donc, au seuil de 5%, que les conditions “avec bruit” ne sont pas équivalentes.

On peut de même comparer les conditions “bruit intermittent” et “témoin”. On obtient alors $t_{obs} = 1.33$, qui n’est pas significatif d’une différence entre les deux conditions

Enoncé 22 Données Craik

Dans une reprise de l’expérience de Craik et Tulving (1975), on désire vérifier l’hypothèse selon laquelle “la profondeur de traitement de l’information” influence la mémorisation. Pour ce faire, on constitue trois groupes de dix sujets. Le premier groupe correspond à la condition “traitement de l’information en profondeur” (i.e., on demande au sujet si le mot présenté est un synonyme de “jeu”). Au second groupe, on demandera un “traitement de l’information acoustique” (i.e., Le mot présenté rime-t-il avec “table”). Le troisième groupe n’effectuera qu’un traitement superficiel (i.e., le mot est-il écrit en majuscules ou minuscules).

Chaque mot est présenté deux fois dans la même condition. On soumet cinquante mots à chaque sujet. On compte pour chaque sujet le nombre de mots retenus après lui avoir demandé de compter “à reculons” de trois en trois à partir de 120 (pourquoi cette dernière précaution ?).

- Combien y a-t-il de variables indépendantes ? de variables dépendantes ? Identifiez-les.
- Comment le chercheur traduira-t-il son “hypothèse de recherche” en hypothèse statistique ?
- Comment traitera-t-il son expérience ?

1) Voici les résultats obtenus (on donne le nombre de mots retenus) ; traitez cette expérience.

G1	29	30	33	33	34	34	36	36	40	40
G2	6	10	10	15	15	15	17	17	18	24
G3	1	1	1	2	3	6	7	7	9	10

2) Répondez aux mêmes questions, mais en admettant qu'une colonne correspond aux résultats d'un même sujet soumis aux différentes conditions.

Réponses :

1) Le tableau d'analyse de variance obtenu est donné par :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}
Groupe	2	4600,27	2300,13	135.39
Résidu	27	458,70	16,99	
Total	29	5058.97		

Le F obtenu est très significatif d'une différence de comportement entre les trois groupes
 2) Remarquez que les données fournies sont fort peu réalistes dans ce cas (il est hautement improbable que les sujets soient rangés exactement dans le même ordre pour les trois conditions expérimentales).

Dans le cas de groupes appareillés (cf. infra d'autres situations de ce genre), la variation intra-groupes se décompose en une variation due aux sujets et un résidu. On obtient le tableau d'analyse de variance suivant :'

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}
Groupe	2	4600,27	2300,13	1024.81
Sujet	9	418,30	46.48	
Résidu	18	40.40	2.24	
Total	29	5058.97		

Le F obtenu est évidemment très significatif d'une différence de comportement selon la condition expérimentale.

Plans $S < A * B >$

Enoncé 23 Dossier "Geometrie"

Dans une tâche de dénomination de figures géométriques, l'auteur étudie l'évolution du temps de réaction verbale en fonction de la discriminabilité des figures.

Dans un premier temps, on présente aux sujets une série de figures. Pour la moitié d'entre eux, la série est constituée de 2 figures, pour l'autre moitié, de 4 figures. Dans chacun des cas, la série est constituée soit de figures facilement discriminables (triangle, carré, . . .) soit de figures plus complexes (octogone, décagone, . . .).

Dans un deuxième temps, on demande à chaque sujet de nommer une figure tirée au hasard dans la série précédente et on mesure le temps de réaction verbale du sujet.

48 sujets répartis en 4 groupes de 12 ont participé à l'expérience.

Les moyennes des temps de réaction mesurés en millisecondes observés sur chacun des quatre groupes sont indiqués dans le tableau suivant :

Incertitude	Discriminabilité	
	Forte	Faible
2 figures	460	510
4 figures	559	864

- 1) Définir la variable dépendante et les variables indépendantes prises en compte. Quel est le plan d'expérience utilisé ?
- 2) Au vu du tableau précédent, indiquer s'il semble y avoir une interaction entre les deux facteurs étudiés. Construire un graphe d'interaction. Commenter ce graphe en rédigeant une phrase exprimant comment se traduit l'effet d'interaction.
- 3) Le tableau d'analyse de variance se présente ainsi :

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
Discriminalité	1	3858.3	3858.3	45.06
Incertitude	1	6238.3	6238.3	72,85
Interaction	1	1885.4	1885.4	22,02
Résidu	44	3767.6	85.6	
Total	47	15666.7		

Préciser comment ont été obtenues :

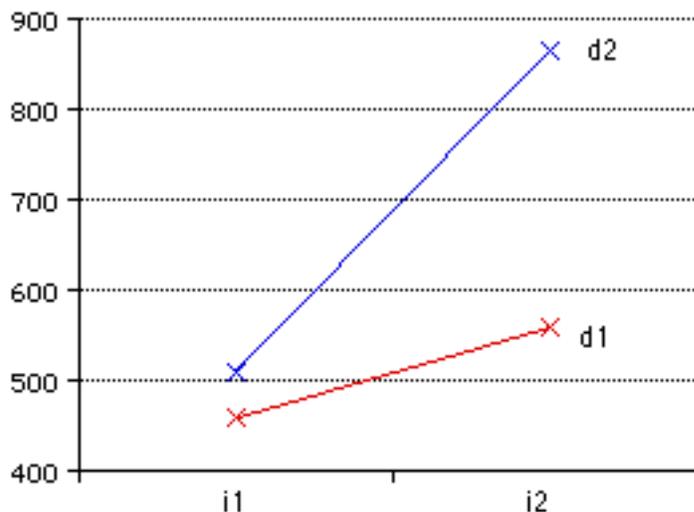
- la valeur 85.6 dans la ligne "résidu" ;
- la valeur 45.06 dans la ligne "discriminalité".

Utiliser la table de la loi de Fisher-Snedecor pour indiquer si les effets principaux et l'effet d'interaction sont significatifs au seuil de 1%.

- 4) Aurait-on pu (au moins partiellement) traiter ces données par des méthodes de comparaison de moyennes ?

Réponses : 1) Le plan utilisé est ici $S_{12} < I_2 * D_2 >$.

2) Le temps de réaction augmente lorsque la discriminalité est plus faible. Mais cet effet est d'autant plus important que l'incertitude est élevé.



3) $85.6 = \frac{3767.6}{44}$; $45.06 = \frac{3858.3}{85.6}$. Au seuil de 1%, $F_{crit}(1, 44) = 7.2$. Les effets principaux et l'effet d'interaction sont donc significatifs.

4) Les effets principaux auraient pu être facilement étudiés par des méthodes de comparaison de moyennes, puisque les facteurs ne comportent que deux modalités. En revanche, il aurait été difficile d'étudier l'interaction.

Enoncé 24 Données Tulving

On demande aux sujets de mémoriser des listes comportant 12, 24 ou 48 mots (facteur \mathcal{A} , avec trois modalités). Ces mots peuvent se regrouper par paires en catégories (par exemple pomme et orange se regroupent en "fruits"). On demande aux sujets d'apprendre

les mots, et on leur montre le nom des catégories à ce moment en leur précisant qu'ils n'ont pas à apprendre le nom de ces catégories. Au moment de l'épreuve de rappel — qui a lieu immédiatement après l'apprentissage — on crée deux conditions. Dans un cas, on présente aux sujets la liste des catégories. Dans l'autre cas, on ne leur présente pas cette liste (facteur \mathcal{B} : présentation de la liste des catégories au moment de l'apprentissage *versus* absence de présentation). Dans cette reprise d'une expérience de Tulving et Pearlstone (1966), la variable dépendante sera le nombre de mots rappelés. En examinant les deux variables indépendantes, la première (nombre de mots de la liste) est, clairement, triviale : il semble superfétatoire de construire une expérimentation pour montrer que plus une liste de mots est longue, plus on peut en retenir. Cette remarque indique que les auteurs de cette expérience s'intéressaient d'emblée à un effet d'interaction.

On interroge dix sujets par condition expérimentale. Voici les résultats :

Résultats d'une reprise de l'expérience de Tulving et Pearlstone.

	Facteur \mathcal{A} : Nombre de mots par liste					
Facteur \mathcal{B}	a_1 : 12		a_2 : 24		a_3 : 48	
b_1	10	6	13	15	17	16
	8	11	18	13	20	23
	12	10	19	9	22	19
	8	9	13	8	13	20
	7	9	8	14	21	19
b_2	12	10	12	13	31	29
	12	12	20	12	30	32
	7	10	19	13	26	24
	9	7	14	15	29	24
	9	12	16	6	28	27

On peut résumer ces résultats dans une matrice des moyennes :

	Facteur \mathcal{A} : Nombre de mots par liste			
Facteur \mathcal{B}	a_1 : 12	a_2 : 24	a_3 : 48	Marge
b_1 :				
Moyenne	9	13	19	13.47
Total	90	130	190	410
b_2 :				
Moyenne	10	14	28	17.33
Total	100	140	280	520
Marge :				
Moyenne	9.5	13.5	23.5	15.5
Total	190	270	470	930

Avant de commencer les calculs, construire un graphe d'interaction entre les deux variables indépendantes considérées. L'examen de la figure suggère l'existence d'un effet du nombre de mots de la liste, d'un effet de la présentation d'indices lors du rappel, et également d'un effet d'interaction : l'effet facilitateur des indices se manifeste essentiellement pour la liste de grande taille. Les calculs permettent d'évaluer ces effets par une approche inférentielle. Justifier le tableau d'ANOVA suivant :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F_{cal})$
\mathcal{A}	2	2080.00	1040.00	115,57 **	$< 10^{-10}$
\mathcal{B}	1	201,67	201,67	22,41 **	.000029
\mathcal{AB}	2	213,33	106,67	11,85 **	.000074
$\mathcal{S}(\mathcal{AB})$	54	486.00			
Total	59	2981			

L'analyse de variance permet de mettre en évidence un effet trivial par ailleurs — du nombre de mots de la liste à mémoriser ($F_{cal}(2, 54) = 115.57$; $p < .01$) sur le nombre de mots retenus. La présentation d'indices lors du rappel améliore la performance des sujets ($F_{cal}(1, 54) = 22.41$; $p < .01$). Mais surtout, on note une interaction significative entre les deux Variables Indépendantes ($F_{cal}(2, 54) = 11.85$; $p < .01$). Cette interaction pouvant s'attribuer pour l'essentiel au fait que l'effet facilitateur des indices ne se manifeste que pour les longues listes (48 mots). De ce fait, une expérimentation construite pour montrer l'effet des indices au moment du rappel avec uniquement des listes courtes, ne pourrait — probablement — pas rapporter un effet significatif de ce facteur.

Enoncé 25 Dossier "Eysenck"

Le modèle de la mémorisation proposé par Craik et Lockhart (1972) stipule que le degré auquel un sujet se rappelle un matériel verbal est fonction du degré auquel ce matériel a été traité lors de sa présentation initiale. Eysenck (1974) voulait tester ce modèle et examiner s'il pouvait contribuer à expliquer certaines différences relevées entre des sujets jeunes et âgés concernant leur aptitude à se rappeler du matériel verbal. L'étude qu'il a menée incluait 50 sujets dont l'âge se situait entre 18 et 30 ans et 50 sujets compris dans la tranche d'âge 55–65 ans. Dans chacune des tranches d'âge, Eysenck a réparti les 50 sujets dans cinq groupes. Le premier devait lire une liste de mots et se contenter de compter le nombre de lettres de chacun d'eux. Le deuxième groupe devait lire chaque mot et lui trouver une rime. Le troisième groupe devait donner un adjectif qui aurait pu être utilisé pour modifier chaque mot de la liste. Le quatrième devait essayer de se former une image précise de chaque mot. Aucun de ces quatre groupes ne savait qu'il faudrait se rappeler les mots ultérieurement. Enfin, le cinquième groupe, ou groupe d'apprentissage intentionnel, devait lire la liste et mémoriser tous les mots. Après avoir passé trois fois en revue la liste de 27 mots, les sujets devaient retranscrire tous les mots dont ils se souvenaient. Le nombre de mots rappelés par chacun des 100 sujets est indiqué par le tableau ci-dessous :

	Gr. 1	Gr. 2	Gr. 3	Gr. 4	Gr. 5
Sujets âgés	9	7	11	12	10
	8	9	13	11	19
	6	6	8	16	14
	8	6	6	11	5
	10	6	14	9	10
	4	11	11	23	11
	6	6	13	12	14
	5	3	13	10	15
	7	8	10	19	11
	7	7	11	11	11
Sujets jeunes	8	10	14	20	21
	6	7	11	16	19
	4	8	18	16	17
	6	10	14	15	15
	7	4	13	18	22
	6	7	22	16	16
	5	10	17	20	22
	7	6	16	22	22
	9	7	12	14	18
	7	7	11	19	21

- 1) a) Quelles sont les variables indépendantes (ou facteurs de variation) prises en compte ? Quel est le nombre de niveaux de chacun des facteurs ?
 b) Quelle est la variable dépendante ? Quel est son domaine de variation ?
 c) Ecrire le plan d'expérience correspondant.
- 2) a) On veut étudier chez les sujets âgés s'il existe une différence de performance entre le groupe 2 (traitement syntaxique) et le groupe 3 (traitement sémantique), en faveur de ce dernier. Le calcul permet d'obtenir les résultats de statistiques descriptives suivants :

	Groupe 2	Groupe 3
Moyenne	6.9	11.0
Effectif	10	10
Ecart-type	2.02	2.37
Ecart-type corrigé	2.13	2.49

- b) Etudier de même s'il existe une différence de performance due à l'âge parmi les sujets du groupe 2.
- 3) *Etude de l'interaction entre les facteurs.* Le tableau suivant indique les moyennes observées pour chacune des deux tranches d'âge, dans chacun des groupes.

	Gr. 1	Gr. 2	Gr. 3	Gr. 4	Gr. 5
Sujets âgés	7.0	6.9	11.0	13.4	12.0
Sujets jeunes	6.5	7.6	14.8	17.6	19.3

Réaliser un graphe illustrant une éventuelle interaction entre l'âge et la condition de mémorisation (groupe). Commenter le diagramme ainsi obtenu.

- 4) *Analyse de variance.* Le tableau d'analyse de variance relatif aux données observées se présente ainsi :

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
Age	1	240.25	240.25	...
Groupe	4	1514.94
Age×Groupe	4	190.30
Résidu	90	722.30	8.026	
Total	99	2667.79		

- a) Compléter ce tableau en calculant les carrés moyens et les statistiques F de Fisher qui sont remplacés par “...” dans le tableau ci-dessus.
- b) Parmi les différentes sources de variation, quelles sont celles qui sont significatives au seuil de 1% ?
- c) Quelles conclusions Eysenck peut-il tirer de cette expérience ?

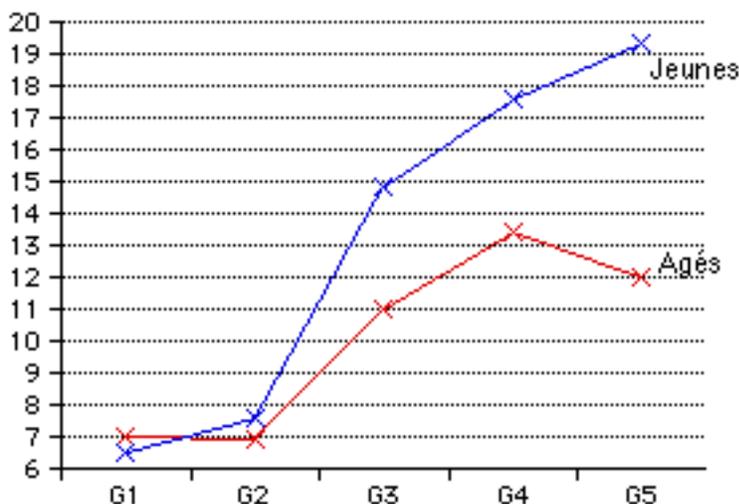
Réponses.

1) Outre le facteur sujet, les facteurs étudiés sont l'âge (2 niveaux), et le groupe expérimental (5 niveaux), selon un plan $S_{10} < G_5 * A_2 >$. La variable dépendante est le nombre de mots retranscrits, son domaine de variation est $[0; 27]$.

2) a) Il s'agit d'une comparaison de moyennes sur deux groupes indépendants. Avec les données fournies, on obtient $t_{obs} = -3.80$ alors que, pour un test bilatéral au seuil de 5%, on obtient $t_{crit} = 2.10$ (ddl = 18). Il existe donc une différence significative entre le traitement syntaxique et le traitement sémantique.

b) Les sujets du groupe 2 forment deux sous-groupes indépendants du point de vue de l'âge. On obtient $t_{obs} = -0.766$. La différence de performance n'est pas significative dans ce cas.

3) Le graphe d'interaction est donné par :



D'après ce graphique, il semble que l'effet de l'âge soit plus marqué lorsque le traitement de l'information est effectué "en profondeur".

4) Le tableau d'ANOVA complet est donné par :

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
Age	1	240.25	240.25	29.93
Groupe	4	1514.94	378.74	47.19
Age×Groupe	4	190.30	47.58	5.93
Résidu	90	722.30	8.026	
Total	99	2667.79		

Au seuil de 1%, on a : $F_{crit}(1, 90) = 6.9$; $F_{crit}(4, 90) = 3.5$. Les effets du groupe, de l'âge et l'effet de l'interaction sont donc tous trois significatifs.

Ainsi, les sujets plus jeunes se rappellent davantage d'éléments que les sujets plus âgés. Les tâches impliquant un traitement plus approfondi permettent une mémorisation plus efficace que celles qui impliquent un traitement plus superficiel. Cependant, l'effet significatif de l'interaction montre que les sujets plus âgés ne réalisent pas d'aussi bonnes performances que les plus jeunes dans les tâches qui impliquent un traitement approfondi, mais réalisent des performances pour ainsi dire équivalentes à celles des sujets plus jeunes lorsque la tâche n'implique qu'un traitement réduit.

Enoncé 26 Dossier "Locus"

Un psychologue s'intéresse à la relation entre le sexe (variable X), le statut socio-économique (variable C) et le "locus of control" perçu. Il a pris huit adultes de chaque combinaison sexe-statut socio-économique et leur a administré une échelle portant sur le "locus of control" ; un score élevé indique que le sujet estime contrôler sa vie quotidienne.

	statut socio-économique		
	Bas	Moyen	Elevé
Hommes	10	16	18
	12	12	14
	8	19	17
	14	17	13
	10	15	19
	16	11	15
	15	14	22
	13	10	20
Femmes	8	14	12
	10	10	18
	7	13	14
	9	9	21
	12	17	19
	5	15	17
	8	12	13
	7	8	16

- 1) a) Quelles sont les variables indépendantes (ou facteurs de variation) prises en compte ? Quel est le nombre de niveaux de chacun des facteurs ?
- b) Quelle est la variable dépendante ? Quel est son domaine de variation ?
- c) Ecrire le plan d'expérience correspondant.
- 2) On veut étudier, pour les sujets de statut socio-économique moyen, s'il existe une différence de "locus of control" entre les hommes et les femmes. Réaliser un test de comparaison de moyennes permettant d'apporter une réponse à la question posée (seuil choisi : 5%).
- 3) *Etude de l'interaction entre les facteurs.* Calculer les moyennes des scores observés sur chacun des 6 groupes. Réaliser un graphe illustrant une éventuelle interaction entre le sexe et le statut socio-économique. Commenter le diagramme ainsi obtenu.
- 4) *Analyse de variance.* Le tableau d'analyse de variance relatif aux données observées se présente ainsi :

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
Sexe	1	65.33	65.33	...
Statut soc-éco	2	338.67
$X \times C$	2	18.67
Résidu	42	355.0	8.45	
Total	47	777.67		

a) Compléter ce tableau en calculant les carrés moyens et les statistiques F de Fisher qui sont remplacés par “...” dans le tableau ci-dessus.

b) Parmi les différentes sources de variation, quelles sont celles qui sont significatives au seuil de 1%?

5) Quelles conclusions le psychologue peut-il tirer de cette expérience?

Réponses.

1) On étudie ici les facteurs “*sexe*” (variable X à deux niveaux) et “*statut socio-économique*” (variable C à trois niveaux). La variable dépendante est une échelle évaluant le “*locus of control*” des sujets. Les valeurs observées se situent dans l'intervalle [5; 22]. Il s'agit d'un plan $S_8 < X_2 * C_3 >$.

2) Il s'agit d'une comparaison de deux moyennes sur des groupes indépendants. On obtient : $t_{obs} = 1.29$, avec 14 ddl. Pour un test unilatéral au seuil de 5%, $t_{crit} = 1.76$. On conclut donc à une différence selon les sexes.

3) Le tableau d'analyse de variance complété est donné par :

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
Sexe	1	65.33	65.33	7.73**
Statut soc-éco	2	338.67	169.33	20.03**
$X \times C$	2	18.67	9.33	1.10 NS
Résidu	42	355.0	8.45	
Total	47	777.67		

On conclut donc à des effets significatifs du sexe et du statut socio-économique sur le “*locus of control*”. En revanche, il ne semble pas y avoir d'interaction entre ces deux facteurs : chez les femmes, la mesure du “*locus of control*” fournit des résultats inférieurs à ceux des hommes, et l'amplitude de cette différence est la même, quel que soit le statut socio-économique.

Enoncé 27 Dossier “Multimedia”

Le multimédia offre certaines potentialités pour induire l'imagerie mentale. Selon certains auteurs, on devrait donc s'attendre à une efficacité supérieure du multimédia en termes d'apprentissage, comparativement aux produits traditionnels. Dubois *et al.* (1998) ont mené une expérimentation visant à identifier les effets des différents formats de présentation de l'information sur l'apprentissage d'une langue étrangère.

Ils s'attendaient à ce que les sujets produisent un meilleur rappel lorsque l'information verbale est accompagnée d'une information figurative. En revanche, la simple présence de multiples sources d'informations devrait provoquer un partage de l'attention. On s'attend donc à de moins bonnes performances si la présentation, en ajoutant une simple illustration, ne permet pas d'intégration des informations entre elles.

Pour leur expérience, les auteurs ont utilisé 60 sujets auxquels était proposée une tâche de mémorisation d'un vocabulaire russe. Quatre groupes de 15 sujets ont été constitués selon les quatre modes de présentation de l'information suivants :

- En condition contrôle P_1 , seuls le mot russe et sa traduction étaient donnés ;
- En condition P_2 , une illustration représentant le mot était ajoutée ;
- En conditions P_3 et P_4 , une méthode suscitant une imagerie mentale imposée a été utilisée, selon la technique du mot-clé. La phrase contenant ce mot-clé était présentée de façon uniquement orale en P_3 , et à l'écrit sur l'écran en P_4 .

Le rappel du vocabulaire consistait à présenter aux sujets un mot russe pour lequel ils devaient trouver et écrire la traduction. Au sein de chaque groupe, trois sous-groupes homogènes ont été constitués, selon le mode de rappel utilisé ; le mot est donné :

- soit seulement à l'écrit (rappel visuel Rv),
- soit seulement à l'oral (rappel auditif Ra)
- soit à l'écrit et à l'oral (rappel audiovisuel Rav).

La performance des sujets est mesurée par le nombre de traductions correctes fournies (score de 0 à 19).

Dans une reprise de cette expérience, les résultats observés sont les suivants :

	P_1	P_2	P_3	P_4
Rv	0	0	0	2
	2	3	0	0
	4	8	0	1
	6	6	0	6
	0	6	3	8
Ra	7	1	10	4
	6	4	13	7
	3	8	17	8
	0	4	15	9
	3	6	18	13
Rav	5	0	4	4
	12	5	7	12
	7	2	15	5
	10	0	12	10
	7	3	14	9

- 1) a) Quelles sont les variables indépendantes (ou facteurs de variation) prises en compte ? Quel est le nombre de niveaux de chacun des facteurs ?
- b) Quelle est la variable dépendante ?
- c) Ecrire le plan d'expérience correspondant.
- 2) a) Calculer les moyennes correspondant aux 12 conditions expérimentales définies par les combinaisons des variables \mathcal{P} et \mathcal{R} .
- b) Réaliser un graphe illustrant une éventuelle interaction entre les variables \mathcal{P} et \mathcal{R} .
- 3) *Analyse de variance.*

Le tableau d'analyse de variance relatif aux données observées se présente ainsi :

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
\mathcal{P}	3	198.6	66.2	...
\mathcal{R}	2	301.9
$\mathcal{P} \times \mathcal{R}$	6	402.1
Résidu	48	446.8	9.31	
Total	59	1349		

a) Compléter ce tableau en calculant les carrés moyens et les statistiques F de Fisher qui sont remplacés par “...” dans le tableau ci-dessus.

b) En utilisant un seuil de 5%, répondre aux questions suivantes :

- La variable “mode de présentation” a-t-elle un effet ?
- La variable “mode de rappel” a-t-elle un effet ?
- L’interaction entre ces variables est-elle significative ?

4) Comparaisons de moyennes

On donne les résultats intermédiaires suivants :

	Rv	Ra	Rav
$\sum x_i$	55	156	143
$\sum x_i^2$	315	1722	1401
Moyenne	2.75	7.8	7.15
Var. corrigée	8.61842	26.5895	19.9237

a) Sans tenir compte des modalités de la variable \mathcal{P} , effectuer un test de comparaison de deux moyennes visant à montrer que les 20 sujets soumis à la modalité Rav obtiennent de meilleurs résultats que ceux soumis à la modalité Rv .

b) Comparer de même les sujets soumis à la modalité Ra à ceux soumis à la modalité Rv .

5) A partir des données et des éléments d’étude développés ci-dessus, justifier les conclusions suivantes formulées par les auteurs :

“On constate l’influence de certaines modalités de présentation de l’information sur la mémorisation. (...) L’ajout d’une image à un corpus sonore et textuel peut constituer une aide notable pour les sujets sous certaines conditions.”

“La quantité d’information à traiter par le sujet n’apparaît pas induire de partage attentionnel limitant les effets d’apprentissage selon l’hypothèse de surcharge cognitive dès lors que les différentes sources d’information sont intégrées.”

“Pour les trois situations de rappel, le résultat le plus intéressant à noter est la moindre performance en situation uniquement visuelle.”

“Dans la situation de rappel auditif, on observe d’une manière générale un meilleur apprentissage lorsque les informations sont intégrées sous forme auditive.”

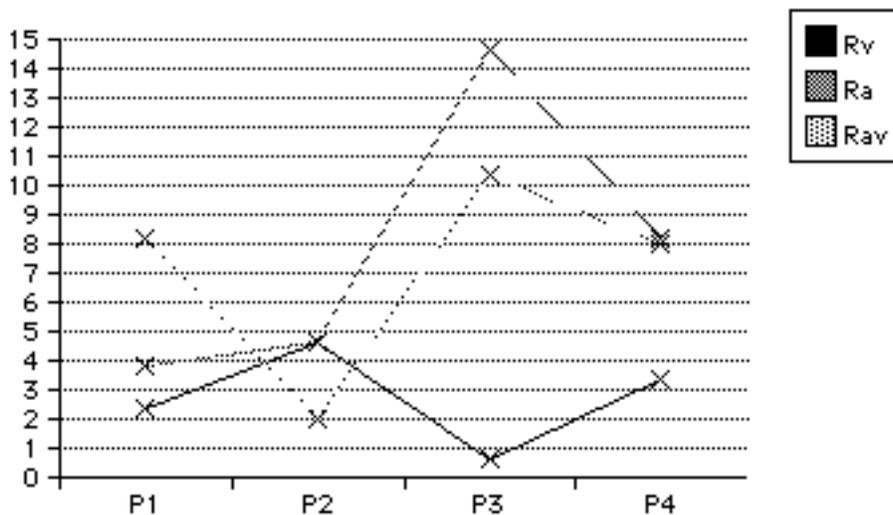
Réponses.

1) Outre le facteur sujet, les facteurs étudiés sont le mode de présentation de l’information (facteur \mathcal{P} à 4 niveaux notés P_1, P_2, P_3 et P_4) et le mode de rappel (facteur \mathcal{R} à trois niveaux notés R_v, R_a et R_{av}). La variable dépendante est le nombre de traductions correctes fournies. L’expérience a été menée selon le plan : $\mathcal{S}_5 < \mathcal{P}_4 * \mathcal{R}_3 >$.

2) Les moyennes correspondant aux 12 conditions expérimentales sont données par :

	P_1	P_2	P_3	P_4
R_v	2.4	4.6	0.6	3.4
R_a	3.8	4.6	14.6	8.2
R_{av}	8.2	2	10.4	8

Le graphe d'interaction a l'allure suivante :



3) Le tableau d'analyse de variance complété donne :

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
\mathcal{P}	3	198.6	66.2	7.11
\mathcal{R}	2	301.9	150.95	16.21
$\mathcal{P} \times \mathcal{R}$	6	402.1	67.02	7.20
Résidu	48	446.8	9.31	
Total	59	1349		

Pour le facteur \mathcal{P} , les nombres de degrés de liberté à prendre en compte sont $ddl_1 = 3$ et $ddl_2 = 48$. Au seuil de 5%, la table du F de Fisher donne $F_{crit} = 2.84$. L'effet du facteur \mathcal{P} est donc significatif.

Pour le facteur \mathcal{R} , les nombres de degrés de liberté à prendre en compte sont $ddl_1 = 2$ et $ddl_2 = 48$. Au seuil de 5%, la table du F de Fisher donne $F_{crit} = 3.23$. L'effet du facteur \mathcal{R} est donc significatif.

Pour l'interaction $\mathcal{P} \times \mathcal{R}$, les nombres de degrés de liberté à prendre en compte sont $ddl_1 = 6$ et $ddl_2 = 48$. Au seuil de 5%, la table du F de Fisher donne $F_{crit} = 2.34$. L'effet d'interaction est donc significatif.

4) a) Il s'agit ici d'une comparaison de moyennes sur deux groupes indépendants. On obtient, en utilisant les résultats fournis, $t_{obs} = 3.68$. Ici, $ddl = 38$; pour un seuil de 5% unilatéral, la table du T de Student donne $t_{crit} = 1.686$. On obtient donc de meilleurs résultats en modalité R_{av} qu'en modalité R_v .

b) La méthode est identique. On obtient ici $t_{obs} = 3.81$ et une conclusion analogue.

5) On a montré un effet du facteur \mathcal{P} , ce qui justifie en partie la première phrase de conclusion. Une étude complémentaire devrait montrer que les différences constatées entre les 4 présentations se font au bénéfice de P_2 et P_4 .

La deuxième phrase reprend l'une des hypothèses de recherche. Les moins bonnes performances ont effectivement été observées lorsque l'illustration est simplement ajoutée, alors que la situation P_4 , dans laquelle l'illustration est intégrée aux autres sources conduit à des résultats généralement supérieurs à ceux de la situation contrôle.

La troisième phrase fait référence aux conclusions trouvées dans la question 4 : nous y avons montré que la modalité R_v obtenait des résultats inférieurs à chacune des deux autres modalités.

La dernière phrase traduit l'interaction entre les facteurs \mathcal{P} et \mathcal{R} . C'est effectivement le groupe soumis à P_3 et R_a qui obtient le meilleur résultat absolu.

Plans $\mathcal{S} < \mathcal{A} > * \mathcal{B}$

Énoncé 28 Données Conrad

Dans une reprise d'une expérience de Conrad (1971), on veut mettre en évidence l'hypothèse de recherche suivante : "les enfants jeunes n'utilisent pas un codage phonologique en mémoire à court terme". Pour ce faire, on sélectionne cinq enfants de 5 ans et 5 enfants de 12 ans (Variable \mathcal{A} , avec deux modalités). On montre à chaque enfant un certain nombre de paires d'images représentant des objets dont on s'est assuré auparavant qu'ils sont nommés d'une seule manière par les enfants. On montre les images aux enfants. Puis on retourne les images (les enfants ne voient plus que le dos des images). Ensuite, on donne aux enfants une paire d'images identiques à celles retournées. Enfin, on leur demande de placer ces nouvelles images comme les images retournées sur la table. Pour la moitié des paires d'images les noms des objets se ressemblent (e.g., noix et doigt). Pour l'autre moitié, les noms des objets ne se ressemblent pas (e.g., maison et cheval). Conrad prédit que les enfants les plus vieux réussiront dans l'ensemble mieux que les enfants les plus jeunes, mais également que les enfants les plus vieux utiliseront un codage phonologique comme mnémotechnique (i.e., "la parole intérieure"). De ce fait, les enfants les plus vieux devront commettre plus d'erreurs lorsque les noms se ressemblent acoustiquement que lorsque les noms diffèrent. On présente à chaque enfant cinquante paires d'images correspondant à la modalité b_1 (dissemblance acoustique), et cinquante paires d'images correspondant à la modalité b_2 (ressemblance acoustique) ; la Variable Dépendante choisie est le nombre de paires d'images correctement reconstituées. L'ordre de présentation est "aléatorisé" pour chaque passation (Pourquoi cette précaution ?).

Essayer de traduire l'hypothèse de recherche en prédiction sur les sources de variation de l'analyse de variance.

Vous avez dû conclure que, d'une part, on s'attend à un effet principal de l'âge (qui est trivial), et, d'autre part, à un effet d'interaction : c'est le point d'importance, ou si vous préférez, le point crucial de la théorie. On retrouve, ici, le rôle essentiel de l'interaction "comme test de théorie".

Résultats de l'expérience			
	a_1b_1	a_1b_2	Somme
s_1	15	14	29
s_2	23	20	43
s_3	12	11	23
s_4	16	17	33
s_5	14	13	27
	80	75	155
	a_2b_1	a_2b_2	Somme
s_6	40	33	73
s_7	38	23	61
s_8	31	21	52
s_9	36	26	62
s_{10}	30	22	52
	175	125	300
	255	200	455

Calcul en 13 points

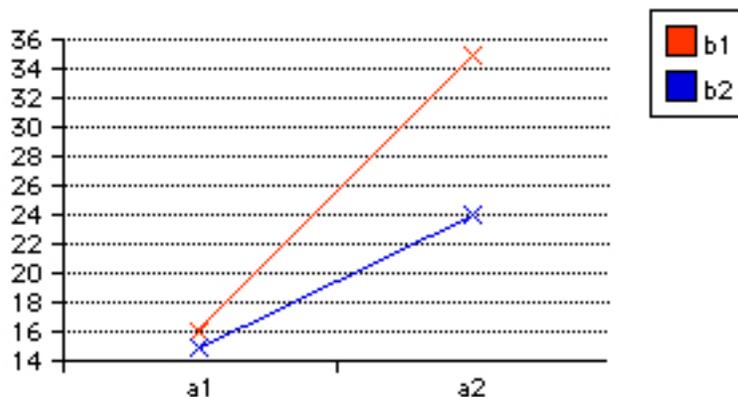
$$\begin{aligned}
 Q1 &= 15 + \dots + 22 = 455 \\
 Q2 &= 15^2 + \dots + 22^2 = 11945 \\
 Q3 &= (15^2 + 300^2)/10 = 11402.5 \\
 Q4 &= (255^2 + 200^2)/10 = 10502.5 \\
 Q5 &= (80^2 + \dots + 125^2)/5 = 11655 \\
 Q6 &= (29^2 + \dots + 52^2)/2 = 11669.5 \\
 Q7 &= 455^2/20 = 10351.25 \\
 Q8 &= SC_A = Q3 - Q7 = 1051.25 \\
 Q9 &= SC_B = Q4 - Q7 = 151.25 \\
 Q10 &= SC_{S(A)} = Q6 - Q3 = 267 \\
 Q11 &= SC_{AB} = Q5 - Q3 - Q4 + Q7 = 101.15 \\
 Q12 &= SC_{BS(A)} = Q2 - Q5 - Q6 + Q3 = 23 \\
 Q13 &= SC_{total} = Q2 - Q7 = 1593.75
 \end{aligned}$$

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F_{cal})$
<i>Entre les sujets</i>					
A	1	1051.25	1051.25	31.5 **	.00050
S(A)	8	267.00	33.38	—	
<i>Dans les sujets</i>					
B	1	151.25	151.25	52.6 **	.00009
AB	1	101.25	101.25	35.2 **	.00035
BS(A)	8	23.00	2.86	—	
Total	19	1593.75			
<i>ns</i> : suspension du jugement au seuil .05 * : p inférieur à .05; ** : p inférieur à .01.					

Ainsi, les prédictions de Conrad se réalisent. On note un effet principal attribuable à l'âge ($F_{cal}(1, 8) = 31.5$; p inférieur à .01), une interaction entre l'âge et la ressemblance acoustique ($F_{cal}(1, 8) = 35.2$; p inférieur à .01). On obtient également un effet principal de la ressemblance ($F_{cal}(1, 8) = 52.6$, p inférieur à .01), mais cet effet est d'interprétation délicate du fait de l'interaction.

Retrouver les résultats précédents à l'aide de méthodes de comparaison de moyennes sur des protocoles dérivés convenablement choisis.

Représenter graphiquement l'interaction entre les deux facteurs.



Le résultat concernant l'âge peut être retrouvé à l'aide d'un test de comparaison de moyennes sur deux groupes indépendants, en utilisant le protocole dérivé des sommes ou des moyennes par sujet.

Le résultat relatif à l'interaction peut être retrouvé en construisant le protocole des différences individuelles et en faisant une comparaison des moyennes de ce protocole sur les deux groupes.

Enoncé 29 Données Bahrick

Dans une reprise partielle d'une expérimentation de Bahrick (1984), on demande à dix sujets (cinq étudiants et cinq étudiantes) de participer à l'expérience suivante :

On montre aux sujets vingt portraits en noir et blanc (composés de dix portraits d'hommes et dix portraits de femmes). On demande aux sujets d'essayer de "mémoriser" ces vingt portraits afin de pouvoir les reconnaître lors d'un test ultérieur. Les sujets accomplissent ensuite pendant environ une demi-heure diverses tâches. Puis on leur présente vingt paires de photographies composées d'un portrait vu pendant la phase d'apprentissage et d'un portrait inconnu des sujets ; et on leur demande d'identifier dans chaque paire de photographies le portrait connu.

On donne ci-dessous le nombre de portraits correctement identifiés en fonction des sujets et du "sexe" des portraits. (Les sujets sont identifiés par un prénom).

Nom du sujet	Portrait masculin	Portrait féminin
Albert	6	6
Henri	6	6
Jules	5	5
Paul	5	5
Octave	5	6
Albertine	6	8
Henriette	7	8
Julie	6	6
Paule	7	7
Octavie	6	6

Indications de solution. L'expérience est menée selon le plan $\mathcal{S}_5 < \mathcal{X}_2 > * \mathcal{P}_2$. Le tableau d'analyse de variance est donné par :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	$Pr(F_{cal})$
<i>Entre les sujets</i>					
\mathcal{X}	1	7.2	7.2	10.28 *	.0124
$\mathcal{S}(\mathcal{X})$	8	5.6	0.7	—	
<i>Dans les sujets</i>					
\mathcal{P}	1	0.8	0.8	3.2 NS	.11
$\mathcal{X}\mathcal{P}$	1	0.2	0.2	0.8 NS	.40
$\mathcal{P}\mathcal{S}(\mathcal{X})$	8	2	0.25	—	
Total	19	15.8			
ns : suspension du jugement au seuil .05					
* : p inférieur à .05 ; ** : p inférieur à .01.					

Enoncé 30 Dossier “King”

En 1986, King a étudié l’activité motrice chez le rat après injection d’un médicament appelé midazolam. La première injection du médicament entraîne généralement une diminution nette de l’activité motrice. Mais une certaine tolérance se développe rapidement. King souhaitait savoir si cette tolérance acquise pouvait s’expliquer sur la base d’une tolérance conditionnée.

Il a utilisé trois groupes et n’a recueilli les données (présentées dans le tableau ci-dessous) que le dernier jour, jour du test. Durant le pré-test, deux groupes d’animaux ont reçu à plusieurs reprises des injections de midazolam réparties sur plusieurs jours, tandis que le groupe témoin recevait des injections d’une solution saline physiologique.

Le jour du test, un groupe (le groupe “même”) a reçu une injection de midazolam dans le même environnement qu’auparavant. Le groupe “différent” a également reçu une injection de midazolam, mais dans un environnement différent. Enfin, le groupe témoin a reçu, pour la première fois, une injection de midazolam. Ce groupe témoin devrait donc manifester la réaction initiale classique au médicament (comportement ambulatoire réduit), tandis que le groupe “même” devrait présenter l’effet normal de tolérance. Par contre, si King a raison, le groupe “différent” devrait réagir de la même façon que le groupe témoin ; en effet, ces animaux allaient cette fois recevoir l’injection dans un environnement différent, et les éléments nécessaires pour susciter une tolérance conditionnée ne seraient pas présents. La variable dépendante du tableau ci-dessous est une mesure du comportement ambulatoire, en unités arbitraires.

Comme le médicament se métabolise sur une période d’environ 1 heure, King a enregistré ses données par blocs (ou intervalles) de 5 minutes. Le tableau 1 donne les valeurs observées pour les 6 premiers blocs de données.

1) a) Quelles sont les variables indépendantes (ou facteurs de variation) prises en compte ? Quel est le nombre de niveaux de chacun des facteurs ?

b) Quelle est la variable dépendante ?

c) Ecrire le plan d’expérience correspondant.

2) a) Calculer les moyennes correspondant aux 18 conditions expérimentales définies par les combinaisons des variables “groupe” et “intervalle”.

b) Réaliser un graphe illustrant une éventuelle interaction entre ces variables. Commenter le graphe obtenu.

3) *Analyse de variance.*

Le tableau d’analyse de variance relatif aux données observées se présente ainsi :

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
<i>Entre les sujets</i>				
Groupes	2	285815	142907	...
$\mathcal{S}(\mathcal{G})$	21	384722	18320	
<i>Dans les sujets</i>				
Intervalles	5	399736
$\mathcal{I} \times \mathcal{G}$	10	80820
Résidu	105	281199	2678	
Total	143	1432293		

a) Compléter ce tableau en calculant les carrés moyens et les statistiques F de Fisher qui sont remplacés par “...” dans le tableau ci-dessus.

	Intervalles					
	1	2	3	4	5	6
Témoin	150	44	71	59	132	74
	335	270	156	160	118	230
	149	52	91	115	43	154
	159	31	127	212	71	224
	159	0	35	75	71	34
	292	125	184	246	225	170
	297	187	66	96	209	74
	170	37	42	66	114	81
Même	346	175	177	192	239	140
	426	329	236	76	102	232
	359	238	183	123	183	30
	272	60	82	85	101	98
	200	271	263	216	241	227
	366	291	263	144	220	180
	371	364	270	308	219	267
	497	402	294	216	284	255
Différent	282	186	225	134	189	169
	317	31	85	120	131	205
	362	104	144	114	115	127
	338	132	91	77	108	169
	263	94	141	142	120	195
	138	38	16	95	39	55
	329	62	62	6	93	67
	292	139	104	184	193	122

TABLE 1 – Données King

b) En utilisant un seuil de 5%, étudier quelles sont les sources de variation dont l'effet est significatif.

4) Comparaisons de moyennes

a) Déterminer le protocole dérivé obtenu en calculant le score moyen observé sur les intervalles 2 à 6 pour chacun des sujets des groupes "témoin" et "différent".

b) Comparer le comportement des deux groupes à l'aide d'un test sur les moyennes de ce protocole dérivé.

Enoncé 31 Dossier "Termites"

Dans une étude expérimentale (d'après Catherine Venturelli : la dynamique du creusement chez *Reticulitermes santonensis*, 1990), on étudie le comportement de creusement de 72 groupes de termites (d'où le facteur groupe G à 72 modalités). Chaque groupe comprend 50 termites. Ces 72 groupes sont répartis dans 12 conditions expérimentales différentes ; d'où le facteur Condition C à 12 modalités. A chacune des conditions expérimentales on affecte 6 groupes, chacun des 72 groupes étant affecté à une seule condition expérimentale. Pour chaque groupe on observe le nombre de centimètres de galeries creusés par le groupe en 12 heures. L'expérience se déroule sur 15 jours, avec 2 relevés par jour correspondant

à deux périodes d'activité : un relevé le soir, où l'on observe le nombre de centimètres creusés pendant la journée (période p1), un relevé le matin, où l'on observe le nombre de centimètres creusés pendant la nuit (période p2). D'où le facteur Jour J à 15 modalités et le facteur Période d'activité P à 2 modalités (p1 et p2).

Les données suivantes concernent une partie des observations, les résultats de 12 groupes de termites. Six groupes ont été placés dans du sable humide (h1), 6 groupes dans du sable peu humide (h2). D'où le facteur Humidité à 2 modalités. Il s'agit des deux relevés (p1 et p2) du premier jour.

Données "Termites" et protocoles dérivés

		p1	p2	p2-p1	(p1+p2)/2
G(h1) humide	g1	0.0	48.80	48.80	24.40
	g2	36.5	79.3	42.80	57.90
	g3	16.2	46.3	30.10	31.25
	g4	17.8	69.3	51.50	43.55
	g5	34.4	96.8	62.40	65.60
	g6	29.4	81.2	51.80	55.30
G(h2) peu humide	g7	0.0	0.0	0.00	0.00
	g8	9.8	51.0	41.20	30.40
	g9	9.4	64.0	54.60	36.70
	g10	13.1	76.9	63.80	45.00
	g11	2.2	30.7	28.50	16.45
	g12	4.4	7.3	2.90	5.85

Moyennes

	p1	p2
h1	22,38	70,28
h2	6,48	38,32

Effets intra

H*P	p1 (jour)	p2 (nuit)	diff p1,p2
h1 (humide)	22,38	70,28	-47,90
h2 (peu humide)	6,48	38,32	-31,84
diff h1,h2	15,90	31,96	-16,06

- 1) En moyenne, jour et nuit confondus, les termites creusent-ils plus en sable humide ou en sable peu humide ?
- 2) Le jour, les termites creusent-ils plus en sable humide ou en sable peu humide ?
- 3) Les termites creusent-ils plus la nuit que le jour ?
- 4) Lorsqu'ils sont placés en sable peu humide, les termites sont-ils influencés par le jour et la nuit ?
- 5) La différence entre le jour et la nuit est-elle la même, quelle que soit l'humidité du sable ?

Indications de solutions.

Les données fournies correspondent au plan d'expérience $S_6 < H_2 > * P_2$.

1) On raisonne ici sur le protocole dérivé des moyennes par individu. Au niveau descriptif : $\bar{x}_1 = 46.33$, $\bar{x}_2 = 22.4$, $s_{c,1} = 16.1352$, $s_{c,2} = 17.8343$. Les termites semblent creuser plus en condition H_1 qu'en condition H_2 .

Un test de comparaison de deux moyennes sur des groupes indépendants donne : $t_{obs} = 2.43$, et $ddl = 10$, valeur significative au seuil de 5% unilatéral.

2) On procède ici comme dans la question précédente, mais en utilisant la première colonne de données. On obtient : $\bar{x}_1 = 22.38$, $\bar{x}_2 = 6.48$, $s_{c,1} = 13.8070$, $s_{c,2} = 5.0598$. $t_{obs} = 2.65$, et $ddl = 10$, valeur significative au seuil de 5% unilatéral.

Un autre paramètre descriptif intéressant est l'effet calibré du facteur H défini par :

$$EC = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_{1,c}^2 + s_{2,c}^2}} = 1.08. \text{ Un écart calibré supérieur à 1 indique un effet important.}$$

3) On utilise ici le protocole dérivé des effets individuels (colonne des différences). On a : $\bar{d} = 39.87$ et $s_c = 20.99$. Une comparaison de moyennes sur deux groupes appariés donne : $t_{obs} = 6.57$ et $ddl = 11$, valeur significative au seuil de 5% unilatéral.

4) On procède comme dans la question précédente, en se limitant aux individus statistiques du deuxième groupe. On a : $\bar{d} = 31.83$ et $s_c = 26.42$. Une comparaison de moyennes sur deux groupes appariés donne : $t_{obs} = 2.95$ et $ddl = 5$, valeur significative au seuil de 5% unilatéral.

5) Il s'agit ici d'étudier l'interaction entre le facteur P et le facteur H . On pourra tracer un diagramme d'interaction à partir du tableau des moyennes donné dans l'énoncé.

On obtient : $Moy((P_2 - P_1)/H_1) = 47.90$, $s_{c,1} = 10.79$, $Moy((P_2 - P_1)/H_2) = 31.83$, $s_{c,2} = 26.42$. On peut aussi calculer l'effet calibré (cf. question 2). Ici, $EC = 0.563$, ce qui est assez faible.

Une comparaison de moyennes sur les deux groupes correspondant aux modalités h_1 et h_2 du facteur H donne : $t_{obs} = 1.38$, valeur non significative aux seuils traditionnels.

Remarque. Le tableau d'analyse de variance est ici le suivant :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	Pr
H	1	3437	3437	5.94	.035
$S(H)$	10	5784	578.4		
P	1	9536	9536	46.84	.00005
Interaction HP	1	387.2	387.2	1.90	.20
Résidu	10	2036	203.6		
Total	23	21180			

On retrouve ainsi les résultats des questions 1, 3 et 5, en remarquant que $F_{cal} = t_{obs}^2$.

En particulier, $t_{obs} = 2.43$ correspond à $F_{cal} = 5.94$ (question 1), tandis que $t_{obs} = 1.38$ correspond à $F_{cal} = 1.90$ (question 5).

Autres plans

Enoncé 32 Dossier "Neglige"

Une recherche a porté sur la "pseudo-négligence" qu'on observe chez des sujets normaux. Ce nom provient des similarités qu'elle présente avec l'héminégligence (atteinte de la moitié du champ visuel) de sujets atteints d'une lésion cérébrale. La tâche des sujets consiste à déterminer le milieu subjectif d'une baguette de 24cm avec la seule aide d'informations kinesthésiques. La pseudo-négligence se traduit par une déviation systématique

vers la droite (pour les droitiers) de ce milieu subjectif par rapport au milieu objectif de la baguette.

Les données portent sur 24 femmes droitrières (facteur S) réparties selon 2 conditions (12 sujets pour chacune) : active (c1) où le sujet peut librement déplacer son doigt posé sur un curseur mobile le long de la baguette ; ou passive (c2) où le sujet commande un moteur déclenchant le mouvement de la baguette dans un sens ou dans l'autre, alors que son doigt ne bouge pas (facteur C). Chaque sujet exécute cette tâche dans 6 situations expérimentales obtenues par le croisement de la main utilisée, gauche (m1) ou droite (m2) et l'orientation du regard, 30N° à gauche (o1), 0N° (o2) ou 30N° à droite (o3) (facteurs M et O). Pour chaque sujet et chaque situation on mesure la déviation en cm entre le milieu subjectif et le milieu objectif de la baguette. Une déviation à droite est notée par une valeur positive, à gauche par une valeur négative.

L'objectif principal de l'expérience est l'étude de l'effet de la condition sur la déviation, et des possibles variations de cet effet selon l'orientation.

Les données sont présentées dans le tableau ci-dessous.

Données "Négligence" et protocoles dérivés (PD1 à PD3)

	m1o1	m1o2	m1o3	m2o1	m2o2	m2o3	PD1	PD2	PD3
s1c1	1.95	0.95	0.55	0.15	-0.80	-0.65	0.36	1.80	1.58
s2c1	3.00	3.10	1.55	-0.10	-0.30	-0.60	1.11	3.10	2.88
s3c1	1.00	1.20	-0.65	-1.25	-2.20	-2.15	-0.68	2.25	2.38
s4c1	0.25	0.20	0.85	-0.85	0.05	-0.05	0.08	1.10	0.72
s5c1	1.15	0.55	0.95	-0.10	-0.40	-1.95	0.03	1.25	1.70
s6c1	1.85	0.75	-1.65	-0.35	0.15	-0.35	0.07	2.20	0.50
s7c1	2.05	1.75	-1.50	1.05	0.05	-0.90	0.42	1.00	0.70
s8c1	1.75	-0.50	0.25	-0.25	-0.05	0.90	0.35	2.00	0.30
s9c1	0.40	1.85	-0.10	-0.45	-0.40	-1.05	0.04	0.85	1.35
s10c1	-0.80	4.10	3.00	-1.15	-0.20	-2.25	0.45	0.35	3.30
s11c1	2.50	-0.75	0.30	0.20	-1.25	-1.20	-0.03	2.30	1.43
s12c1	1.80	1.65	0.55	1.00	-1.00	1.30	0.88	0.80	0.90
s13c2	-0.30	-0.10	-0.55	1.30	-1.90	0.75	-0.13	-1.60	-0.37
s14c2	1.40	-1.00	0.95	-0.20	0.00	-0.50	0.11	1.60	0.68
s15c2	0.25	0.75	-0.70	0.75	0.55	0.60	0.37	-0.50	-0.53
s16c2	0.75	1.10	1.40	0.25	-1.55	0.05	0.33	0.50	1.50
s17c2	-0.30	-0.70	-0.80	0.85	-0.10	-1.15	-0.37	-1.15	-0.47
s18c2	-2.10	3.45	-1.85	0.95	1.50	2.80	0.79	-3.05	-1.92
s19c2	1.85	-0.55	2.25	-0.05	1.55	-0.30	0.79	1.90	0.78
s20c2	1.65	-0.75	0.05	-0.60	-1.55	-1.75	-0.49	2.25	1.62
s21c2	-0.75	1.25	-0.25	-0.20	-0.05	2.35	0.39	-0.55	-0.62
s22c2	1.80	1.15	1.95	0.80	0.85	0.90	1.24	1.00	0.78
s23c2	-0.95	0.15	0.80	-0.15	-0.30	-1.05	-0.25	-0.80	0.50
s24c2	0.20	-0.45	-0.80	0.65	2.20	-0.10	0.28	-0.45	-1.27

Réf : Chokron, Imbert (1993) - *Egocentric reference and asymmetric perception of space. Neuropsychologia* 31, 3, 267-275. D'après J.M. Bernard (1994) - *Structure des données, données planifiées Mathématiques, Informatique et Sciences humaines n° 126* 7-18.

1) a) Pour chacun des 4 cas ci-dessous, écrire au moyen des symboles <> et * la relation entre les deux facteurs S et C ; M et O ; C et M ; C et O.

- b) Ecrire au moyen des mêmes symboles la relation entre les trois facteurs S, M et O.
 2) a) On calcule la moyenne de toutes les valeurs observées. On trouve 0.256. Que signifie cette valeur. Que peut-on en conclure ?
 b) On s'intéresse aux effets moyens et intra du facteur C.

	m1	m2	Moyennes
c1	+0.996	-0.483	0.256
c2	+0.285	+0.226	0.256
Moyennes	0.640	-0.128	0.256

Commenter l'effet moyen du facteur C.

Commenter l'effet observé du facteur C lorsque c'est la main gauche (m1) qui est utilisée. Calculer la valeur de cet effet

Construire un graphe représentant l'interaction entre les facteurs C et M.

- 3) Les trois dernières colonnes du tableau général (PD1 à PD3) indiquent trois protocoles pouvant être dérivés du protocole de base. Indiquer, pour chacun des effets ci-dessous, quel est le protocole dérivé pertinent et indiquer quel calcul a permis d'obtenir la première valeur de ce protocole dérivé :

Effet de C ; effet de M ; effet de M.C ; effet de M/o1 .

- 4) On s'intéresse à l'effet de la condition (C) avec la main gauche (m1) et avec l'orientation o2. Le protocole dérivé pertinent est la deuxième colonne du tableau principal (m1o2). A l'aide d'un test de comparaison de moyennes, déterminer si cet effet est significatif.

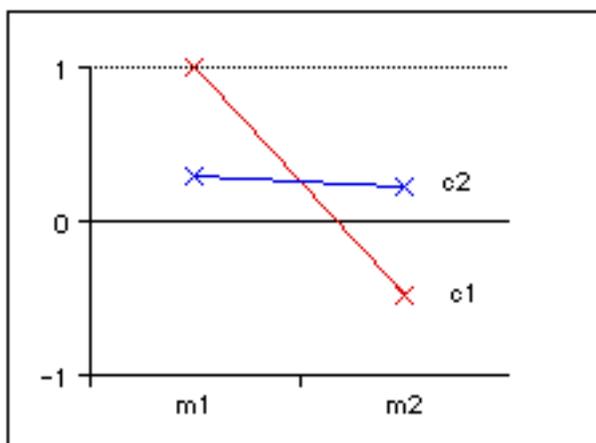
Réponses : 1) a)

<i>S et C</i>	<i>S<C></i>
<i>M et O</i>	<i>M*O</i>
<i>C et M</i>	<i>C*M</i>
<i>C et O</i>	<i>C*O</i>

1) b) Entre S, M et O : $S*M*O$.

2) a) La moyenne générale représente l'effet de la pseudo-négligence, indépendamment des effets des autres facteurs.

b) L'effet moyen du facteur C est nul. En revanche, l'effet observé du facteur C dans la modalité m1 est $0.996 - 0.285 = 0.711$. Le graphe d'interaction pourra être représenté par :



c)

	PD	Calcul
Effet de C	PD1	$(1.95 + 0.95 + 0.55 + 0.15 - 0.80 - 0.65)/6$
Effet de M	PD3	$(1.95 + 0.95 + 0.55)/3 - (0.15 - 0.8 - 0.65)/3$
Effet de M.C	PD3	id.
Effet de M/o1	PD2	$1.95 - 0.15$

3) Il s'agit d'une comparaison de moyennes sur groupes indépendants. On obtient les résultats suivants :

	Moyenne	écart type	écart type cor.
c1	1.238	1.333	1.392
c2	0.358	1.211	1.265

$t_{obs} = 1.6191$ et $ddl = 22$. Au seuil de 5%, la différence n'est pas significative.

Il s'agit ici d'un plan $S < C_2 > * M_2 * O_3$. Les éléments vus en cours ne permettent pas de prévoir la structure du tableau d'analyse de variance, qui est ici assez complexe :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	P_r
C2	1	0.000	0.000	0.00	0.997
S(C2)	22	31.658	1.439		
M2	1	21.275	21.275	13.50	0.001
C2 × M2	1	18.169	18.169	11.53	0.003
M2 × S(C2)	22	34.677	1.576		
O3	2	5.342	2.671	2.25	0.118
C2 × O3	2	3.236	1.618	1.36	0.267
O3 × S(C2)	44	52.348	1.190		
M2 × O3	2	1.357	0.678	0.57	0.571
C2 × M2 × O3	2	0.495	0.248	0.21	0.814
Résidu	44	52.586	1.195		
Total	143	221.142			

Ce tableau peut être obtenu à l'aide de Minitab. On saisit les données, à raison d'une colonne pour chaque facteur et d'une colonne pour la variable dépendante. Ces colonnes sont nommées "Sujet", "Condition", "Main", "Orientation". On utilise le menu Stats - Anova - Modèle linéaire généralisé. On complète ensuite le dialogue en indiquant dans la zone d'édition "Modèle" :

Condition Sujet(Condition) Main Main*Condition Main*Sujet(Condition)

Orientation Orientation*Condition Orientation*Sujet(Condition)

Main*Orientation Main*Orientation*Condition

et en indiquant Sujet comme facteur aléatoire.

Ce tableau ne fait d'ailleurs que confirmer ce que nous avons établi par ailleurs : seuls le facteur "Main" et l'interaction "Main × Condition" ont des effets significatifs.

Enoncé 33 Dossier "Tapping"

Une tâche de "Tapping" consiste à demander à des sujets droitiers d'appuyer avec l'index sur un bouton le plus rapidement possible durant une période limitée (20s). On note le nombre d'appuis effectués durant cette période. Huit garçons (sexe 1) et huit filles (sexe 2) ont passé une expérience dans laquelle on comparait les performances selon que la tâche était effectuée avec la main gauche (m1) ou avec la main droite (m2), et selon

que les sujets avaient à résoudre une tâche concurrente (c1) ou non (c2). Chaque sujet est confronté à chacune des 4 conditions définies par le croisement des facteurs M et C. Les données présentées dans le tableau 2 correspondent à la moyenne des performances obtenues sur 5 essais.

Critères d'importance de l'effet :

Critère sémantique : On considérera qu'un effet est faible s'il est inférieur à 1, important s'il est supérieur à 2.

Critère psychométrique : On prendra les critères habituels ($d/s < 1/3$ et $d/s > 2/3$) comme limites d'un effet faible et d'un effet important.

N.B. : l'effet d'un facteur est la différence des scores observés pour les deux niveaux du facteur. Dans les notations précédentes, s désigne l'écart type de la série des effets individuels. De manière classique, la quantité $\frac{d}{s(d)}$ est appelée *effet calibré*.

	m1c1	m2c1	m1c2	m2c2
s1x1	70.25	79.50	61.75	68.00
s2x1	57.50	65.00	62.25	71.00
s3x1	71.00	91.00	60.00	68.00
s4x1	63.75	76.25	58.25	70.50
s5x1	72.50	60.25	61.25	60.50
s6x1	61.25	80.00	64.25	87.00
s7x1	58.00	59.75	62.75	69.00
s8x1	57.50	64.25	74.25	85.00
s9x2	62.00	66.50	66.25	72.50
s10x2	74.00	78.25	74.25	87.25
s11x2	63.25	77.50	61.50	86.50
s12x2	88.25	91.50	93.50	83.25
s13x2	60.75	67.25	60.75	69.25
s14x2	70.75	84.00	73.25	79.50
s15x2	54.50	59.00	64.50	68.25
s16x2	48.50	51.00	62.50	70.25

TABLE 2 – Données “Tapping”

- 1) Pour chacun des 5 effets $X, M, C, X.M, M.C$ indiquer :
 - quel est, parmi les 4 protocoles dérivés du tableau 3, le protocole dérivé pertinent pour l'étude de cet effet
 - comment a été calculée la première valeur (sujet s1) de ce protocole dérivé pertinent.
- 2) On s'intéresse à l'effet du facteur Sexe (X), c'est-à-dire aux différences de performances obtenues par les garçons (x1) et les filles (x2). On trouve une différence de performance $d_{obs} = 3.086$ en faveur des filles. On veut tester l'hypothèse H_0 d'une absence d'effet parent pour cette comparaison.
 - Indiquer la formule du test T de Student à utiliser dans ce cas.
 - On trouve $t_{obs} = 0.788$. Indiquer le nombre de degrés de liberté et le résultat du test. Donner une conclusion inférentielle sur l'effet de X .
- 3) On s'intéresse à l'effet du facteur C, c'est-à-dire à l'effet de la tâche concurrente sur les performances au tapping. En moyenne, on trouve $m_{c1} = 68.27$ et $m_{c2} = 70.53$ d'où

	PD1	PD2	PD3	PD4
s1x1	-3.00	7.750	-10.000	69.8750
s2x1	1.25	8.125	5.375	63.9375
s3x1	-12.00	14.000	-17.000	72.5000
s4x1	-0.25	12.375	-5.625	67.1875
s5x1	11.50	-6.500	-5.500	63.6250
s6x1	4.00	20.750	5.000	73.1250
s7x1	4.50	4.000	7.000	62.3750
s8x1	4.00	8.750	18.750	70.2500
s9x2	1.75	5.375	5.125	66.8125
s10x2	8.75	8.625	4.625	78.4375
s11x2	10.75	19.625	3.625	72.1875
s12x2	-13.50	-3.500	-1.500	89.1250
s13x2	2.00	7.500	1.000	64.5000
s14x2	-7.00	9.750	-1.000	76.8750
s15x2	-0.75	4.125	9.625	61.5625
s16x2	5.25	5.125	16.625	58.0625

TABLE 3 – Protocoles dérivés des données “Tapping”

$d_{obs} = 2.26$. On souhaite savoir si l’effet de la tâche concurrente est différent pour les garçons (C/x1) et les filles (C/x2). Pour cela, on dérive le protocole des moyennes de support X*C représenté ci-dessous.

	c1	c2
x1	67.984	67.734
x2	68.563	73.328

– Pour chacun des deux effets C/x1 et C/x2, calculer les valeurs des effets, puis conclure sur l’importance des effets en utilisant le critère sémantique.

– Construire un graphique représentant l’interaction entre C et X.

4) La première colonne du tableau 3 (protocole PD1) est un sous-protocole de structure S8<X2>.

– Calculer sur ce protocole les moyennes m_{x_1} et m_{x_2} , les variances corrigées ($s_{1,c}^2$ et $s_{2,c}^2$) et les écarts-types corrigés de chacun des deux groupes x1 et x2.

– Calculer la variance corrigée intra et l’écart-type corrigé intra.

5) Pour les mêmes données que la question précédente, de structure S8<X2>, on peut calculer la variance inter (variance des moyennes des deux groupes x1 et x2) et la variance intra (moyenne des variances des deux groupes).

– Indiquer comment augmenter la variance intra sans modifier la variance inter.

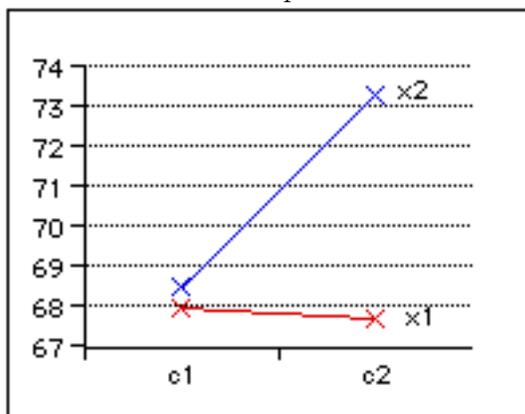
– Indiquer comment augmenter la variance inter sans modifier la variance intra.

Indications de réponses : 1)

Effet	Protocole	Calcul
X	PD4	$(70.25 + 79.50 + 61.75 + 68)/4$
M	PD2	$[(79.50 - 70.25) + (68.00 - 61.75)] / 2$
C	PD3	$[(61.75 + 68.00) - (70.25 + 79.50)] / 2$
X.M	PD2	
M.C	PD1	$(68.00 - 61.75) - (79.50 - 70.25)$

2) Comparaison de moyennes sur groupes indépendants. ddl = 14. Pas d'effet significatif au seuil de 5%.

3) Le graphe d'interaction est donné par :



4) On obtient : $m_{x_1} = 1.25$, $m_{x_2} = 0.9025$, $s_{1,c}^2 = 46.66$, $s_{2,c}^2 = 64.570$, $s_{1,c} = 6.83$, $s_{2,c} = 8.04$.

La variance corrigée intra est la demi-somme des variances précédentes (car il s'agit de groupes équilibrés). D'où $s_{intra}^2 = 55.615$ et $s_{intra} = 7.45$.

5) Pour augmenter la variance intra sans modifier la variance inter, on modifie les scores de façon à augmenter la dispersion dans l'un des groupes sans modifier les moyennes des groupes. Par exemple, on diminue de 10 points le score du sujet 3 et on augmente de 10 points celui du sujet 5.

Pour augmenter la variance inter sans modifier la variance intra, on peut, par exemple, augmenter d'une même quantité tous les scores du groupe présentant la moyenne la plus élevée.

Enoncé 34 Dossier "TR"

TR= Temps de réaction

Les données présentées ci-dessous sont extraites d'une expérience de temps de réaction (Holender et Bertelson, 1975). La tâche du sujet (adulte) est de réagir le plus rapidement possible à la présentation d'un stimulus. Deux facteurs expérimentaux sont en jeu : le facteur F, fréquence du stimulus, à 2 modalités : f1 : stimulus fréquent (de fréquence 0.75) f2 : stimulus rare (de fréquence 0.25) et le facteur D, durée de la période préparatoire (délai entre la présentation d'un signal avertisseur et celle du stimulus), à 2 modalités également : d1 : période courte (0.5 secondes) d2 : période longue (5 secondes). On introduit ici un facteur supplémentaire (non présent dans l'expérience originale) en supposant que les sujets sont repartis en 2 groupes de 4 sujets chacun, d'où le facteur Groupe, $G = \{g1, g2\}$. Le facteur sujet, S, a 8 modalités.

Chaque sujet effectue plusieurs essais dans chacune des 4 conditions expérimentales correspondant aux modalités du croisement F2 * D2. Le protocole de base présenté ci-dessous donne pour chaque sujet, et chacune des conditions expérimentales, la moyenne des temps

de réaction pour les différents essais (en millisecondes). D'où un protocole numérique de 32 observations.

		Protocole de base				Protocoles dérivés		
		f1d1	f2d1	f1d2	f2d2	F/d1	F/d2	Moy.
S(g1)	s1	387	435	416	473	48	57	427.75
	s2	321	336	343	368	15	25	342
	s3	333	362	358	390	29	32	360.75
	s4	344	430	352	393	86	41	379.75
S(g2)	s5	368	432	432	504	64	72	434
	s6	357	367	394	411	10	17	382.25
	s7	336	346	340	421	10	81	360.75
	s8	387	454	438	496	67	58	443.75

Tableau des moyennes (m) et des écarts types corrigés (s) :

		Protocole de base				Protocoles dérivés		
		f1d1	f2d1	f1d2	f2d2	F/d1	F/d2	Moy.
g1	m	346.250	390.750	367.250	406.000	44 500	38.750	377.56
	s	28.745	49.406	33.079	46.036	30.795	13.817	36.84
g2	m	362.000	399.750	401.000	458.000	37 750	57.000	405.19
	s	21.307	51.461	45.092	48.778	32.066	28.296	40.08
Ens.	m	354.125	395.25	384.125	432			

Facteur F - Facteur D

	f2	f1	f2 - f1
s1	454	401.5	52.5
s2	353	332	20
s3	376	345.5	30.5
s4	411.5	348	63.5
Moy.			41.625
$s_{1,c}$			19.90
s5	468	400	68
s6	389	375.5	13.5
s7	383.5	338	45.5
s8	475	412.5	62.5
Moy.			47.375
$s_{2,c}$			24.53
Moy.			44.5
s_c			20.91

	d2	d1	d2 - d1
s1	444.5	411	33.5
s2	355.5	328.5	27
s3	374	347.5	26.5
s4	372.5	387	-14.5
Moy.			18.125
$s_{1,c}$			21.98
s5	468	400	68
s6	402.5	362	40.5
s7	380.5	341	39.5
s8	467	420.5	46.5
Moy.			48.625
$s_{2,c}$			13.28
Moy.			33.75
s_c			23.42

- 1) Quel est le plan d'expérience utilisé?
- 2) Etudier l'effet du facteur G (groupe).
- 3) Etudier l'effet principal du facteur F.
- 4) Etudier l'effet principal du facteur D.
- 5) Construire un graphe illustrant l'interaction entre les les facteurs D et F. Le commenter.

6) Construire un graphe illustrant l'interaction entre les facteurs D et G. Quel est le protocole dérivé pertinent pour étudier cette interaction ? Cette interaction est-elle significative ? Conclure à l'aide d'un test de comparaison de moyennes.

Indications de correction.

1) *Le plan d'expérience est $S_4 < G_2 > *D_2 * F_2$.*

2) *Le protocole dérivé pertinent est ici celui des moyennes par sujet (premier tableau). En utilisant les données calculées dans le second tableau, on obtient $t_{obs} = 1.015$, résultat non significatif aux seuils traditionnels.*

3) *L'effet principal du facteur F peut être étudié à l'aide d'une comparaison de moyennes sur deux groupes appariés, en utilisant les données du tableau 3. On obtient : $t_{obs} = 4.03$ et $ddl = 7$, résultat significatif au seuil de 5% unilatéral.*

4) *L'effet principal du facteur D peut être étudié à l'aide d'une comparaison de moyennes sur deux groupes appariés, en utilisant les données du tableau 4. On obtient : $t_{obs} = 6.01$ et $ddl = 7$, résultat significatif au seuil de 5% unilatéral.*

5) *On utilise les moyennes figurant dans la dernière ligne du tableau 2. Le graphe ne montre aucune interaction entre D et G.*

6) *On utilise ici le tableau 4. L'interaction peut être étudiée à l'aide d'une comparaison de deux moyennes sur des groupes indépendants. On obtient : $t_{obs} = 1.67$ et $ddl = 6$, résultat non significatif au seuil de 5% unilatéral.*

Enoncé 35 Données "Figures"

Les données qui suivent sont empruntées à une expérience de ségrégation perceptive sur des figures de GOTTSCHALDT. La tâche du sujet consiste à retrouver et à retracer les contours d'une figure simple dans des figures complexes. Le matériel comportait plusieurs planches de difficulté croissante. Pour l'analyse qui suit, on retiendra seulement les résultats relatifs aux planches p1 et p2.

Les sujets de l'expérience ont été affectés au hasard à l'une des deux conditions d'apprentissage a1 et a2 décrites plus loin. A l'intérieur de chaque condition, les sujets passent toutes les planches, dans tous les ordres possibles, donc s'agissant des planches p1 et p2 : soit dans l'ordre 1-2, soit dans l'ordre 2-1.

Les conditions a1 et a2 sont définies de la manière suivante :

- condition a1 : les sujets effectuent la tâche après avoir procédé à un apprentissage prolongé de figures simples ;
- condition a2 : les sujets effectuent la tâche sans apprentissage préalable.

La variable dépendante de base est le temps (en secondes) mis pour repasser une figure simple (temps moyen par sujet et par planche).

Pour l'analyse qui suit, on a retenu le sous-protocole suivant relatif à 24 sujets (6 sujets pour chacun des 4 groupes) et aux deux planches p1 et p2.

condition a1				condition a2			
		planche p1	planche p2			planche p1	planche p2
g11 ordre 1-2	1	15	38	g12 ordre 1-2	13	6	27
	2	9	40		14	7	15
	3	17	20		15	25	24
	4	8	13		16	26	30
	5	16	41		17	10	31
	6	9	35		18	6	10
g21 ordre 2-1	7	7	27	g22 ordre 2-1	19	6	22
	8	7	36		20	10	27
	9	12	35		21	15	18
	10	4	24		22	10	22
	11	7	36		23	9	25
	12	7	30		24	9	5

1) Chacun des sujets de l'expérience a été affecté au hasard à l'un des quatre groupes g11, g21, g12, g22. Par ailleurs chaque sujet passe les deux planches p1 et p2. On appellera :

P2 = {p1, p2} le facteur "Planches" ;

G4 = {g11, g21, g12, g22} le facteur "Groupe" ;

S le facteur "sujets".

Donner une formule verbale et une justification de chacune des écritures suivantes :

S<G4> ; S*P2 ; S<G4>*P2

2) On considère les facteurs :

Apprentissage A2 = {a1, a2} avec a1 : apprentissage préalable, a2 : pas d'apprentissage préalable.

Ordre O2 = {o1, o2} avec o1 : planche p1 puis planche p2, o2 : planche p2 puis planche p1

Donner une formulation verbale et une justification de l'écriture suivante : O2*A2.

Donner enfin une formulation verbale de l'écriture suivante : S<O2*A2>*P2

3) A l'intérieur de chacun des 4 groupes, on a calculé la moyenne et la variance corrigée relatives à chaque planche. Dans le tableau suivant, on trouvera les résultats relatifs à la planche 1 (les résultats relatifs à la planche 2 n'étant pas nécessaires pour les calculs demandés par la suite) ; dans chaque case, la première valeur est la moyenne, la deuxième la variance corrigée.

condition a1			condition a2		
	planche p1	planche p2		planche p1	planche p2
g11	12,3 16,67		g12	13,3 91,07	
g21	7,3 6,67		g21	9,8 8,57	

L'objectif principal de l'expérience est d'examiner s'il y a une différence entre les conditions a1 et a2. On se bornera ici à cet examen pour la planche p1 seulement, à l'intérieur de chacun des ordres de passation. Donc, on examinera les 2 comparaisons g11, g12 et g21, g22.

a) Que suggère l'examen à vue des données, indépendamment de toute procédure d'inférence statistique ?

b) Examiner d'un point de vue inférentiel chacune des 2 comparaisons indiquées; on pourra notamment procéder à un test de comparaison de 2 moyennes. Commenter brièvement les résultats obtenus.

Réponses :1) $S < G_4 >$: chaque sujet est affecté à un seul groupe; le facteur "sujet" est emboîté dans le facteur "groupe".

$S * P_2$: chaque sujet passe par les deux niveaux du facteur "planche". Le facteur "sujet" est croisé avec le facteur "planche".

2) $O_2 * A_2$: chaque niveau du facteur "apprentissage" est combiné avec chaque niveau du facteur "ordre". Les facteurs O_2 et A_2 sont croisés.

$S < O_2 * A_2 > * P_2$: Chaque sujet est affecté à un ordre donné et un type d'apprentissage donné. Chaque sujet passe par les deux modalités du facteur "planche".

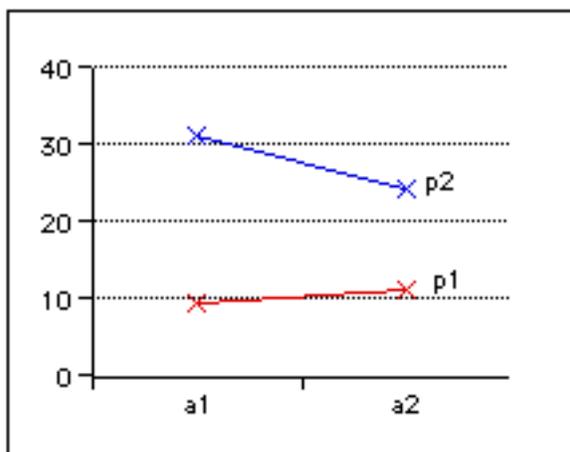
3) b) On compare g_{11} et g_{12} à l'aide d'une comparaison de moyennes sur des groupes indépendants. $t_{obs} = -0.24$, qui n'est pas significatif d'une différence entre les deux groupes. De même, la comparaison des groupes g_{21} et g_{22} aboutit à $t_{obs} = -1.56$, dont le niveau de significativité n'est que de 7.4% .

Remarques. On obtiendrait des résultats plus significatifs en étudiant les scores obtenus sur la planche p2.

Le tableau complet d'analyse de variance donne ici :

Source	ddl	SC	CM	F_{cal}	Pr
O_2	1	96.33	96.33		
A_2	1	200.08	200.08	2.75	11%
O_2A_2	1	2.08	2.08		
$S(O_2A_2)$	20	1457.51	72.88		
P_2	1	2914.08	2914.08	89.22	**
O_2P_2	1	24.08	24.08		
A_2P_2	1	408.33	408.33	12.5	0.2%
$O_2A_2P_2$	1	16.33	16.33		
Résidu	20	653.17	32.66		
Total	47	5772			

L'effet du facteur "planche" est très significatif. L'interaction entre les facteurs "apprentissage" et "planche" est également très significatif et peut être illustré par un graphe d'interaction.



Enoncé 36 Dossier "Sysseau"

Dans un article publié en 1996, A. Sysseau et D. Brouillet étudient le rôle de la nature et

de la valeur affective d'un texte dans la récupération du souvenir chez les personnes âgées. L'expérience a concerné 80 sujets répartis en 2 groupes : 40 sujets présentant un déficit mnésique et 40 sujets non déficitaires. Quatre textes ont été utilisés, correspondant au croisement des deux modalités du facteur "type de texte" (narratif v/s descriptif) et des deux modalités du facteur "connotation" (affective v/s neutre). On a constitué 8 groupes de 10 sujets : chaque texte est proposé à un groupe de sujets déficitaires et un groupe de sujets non-déficitaires.

La performance des sujets est mesurée par le nombre de propositions correctement rappelées (score de 0 à 20).

Les auteurs font les hypothèses suivantes :

Quel que soit le groupe, les textes narratifs seront mieux restitués que les textes descriptifs, avec des performances, dans le groupe non déficitaire, supérieures à celles du groupe déficitaire. De plus, la charge affective facilitera la restitution des textes, dans le groupe déficitaire. Ainsi, l'association "charge affective et structure narrative" aurait pour conséquence une atténuation des différences de performances entre le groupe déficitaire et non déficitaires.

Les résultats observés dans une reprise de cette expérience sont rassemblés dans le tableau 4.

1) a) Quelles sont les variables indépendantes (ou facteurs de variation) prises en compte ? Quel est le nombre de niveaux de chacun des facteurs ?

b) Quelle est la variable dépendante ?

c) Ecrire le plan d'expérience correspondant.

2) a) Compléter le tableau 6 en calculant les carrés moyens et les statistiques F de Fisher qui sont remplacés par "... " dans l'énoncé.

b) Utiliser ce tableau pour déterminer si les effets principaux des facteurs déficit mnésique, type de texte et connotation affective sont significatifs.

3) *Etude des interactions*

a) Calculer les scores moyens des 4 groupes obtenus en croisant les deux facteurs déficit et type de texte, indépendamment de la connotation affective du texte.

b) Réaliser un graphe montrant l'absence d'interaction entre ces deux facteurs.

c) Réaliser une étude analogue montrant l'interaction entre le déficit mnésique et la connotation affective du texte.

d) Utiliser le tableau d'analyse de variance (tableau 6) pour confirmer au niveau inférentiel les résultats précédents.

4) Les auteurs affirment :

Quel que soit le texte, lorsque la connotation affective est présente, les sujets déficitaires ont des performances améliorées.

a) Justifier cette affirmation, pour les textes descriptifs, à l'aide d'un test unilatéral de comparaison de moyennes.

Les auteurs poursuivent :

Ils ont alors des performances comparables à celles des sujets non déficitaires.

b) Justifier cette affirmation en s'appuyant sur l'un des tableaux d'analyse de variance fournis.

Les auteurs affirment également :

Quel que soit le texte, si la connotation est neutre, les sujets non déficitaires obtiennent des résultats supérieurs aux sujets déficitaires.

c) L'un des tableaux d'analyse de variance permet de justifier en partie cette conclusion. Lequel? Pourquoi la justification n'est-elle que partielle?

5) Au vu des résultats obtenus, les hypothèses des auteurs sont-elles vérifiées?

	texte narratif		texte descriptif	
	connotation affective	connotation neutre	connotation affective	connotation neutre
déficitaires	0	2	1	1
	2	0	3	0
	1	5	0	0
	8	9	4	1
	2	1	1	0
	4	0	2	1
	1	0	2	1
	0	7	1	1
	6	3	0	0
	9	0	0	0
non déficitaires	0	0	0	6
	4	2	0	4
	2	3	3	2
	5	6	4	0
	1	3	2	0
	2	8	0	1
	6	6	0	1
	2	4	2	3
	0	3	1	0
	2	5	0	5

TABLE 4 – Données observées

		texte narratif		texte descriptif	
		connotation affective	connotation neutre	connotation affective	connotation neutre
déficitaires	\bar{x}	3.3	2.7	1.4	0.5
	s	3.13	3.10	1.28	0.50
	s_c	3.30	3.27	1.35	0.53
non déficitaires	\bar{x}	2.4	4.0	1.2	2.2
	s	1.91	2.19	1.40	2.09
	s_c	2.01	2.31	1.48	2.20

TABLE 5 – moyennes et écarts types par groupe

Sources de var.	ddl	SC	CM	F
Déficit \mathcal{D}	1	4.513	4.513	...
Type texte \mathcal{T}	1	63.012
Connotation \mathcal{C}	1	1.513
Interaction $\mathcal{D} \times \mathcal{T}$	1	1.513
Interaction $\mathcal{D} \times \mathcal{C}$	1	21.013
Interaction $\mathcal{T} \times \mathcal{C}$	1	1.013
Inter. $\mathcal{D} \times \mathcal{T} \times \mathcal{C}$	1	0.112	0.112	0.02
Résidu	72	360.700	5.010	
Total	79	453.388		

TABLE 6 – Analyse de variance (ensemble des facteurs)

Sources de var.	ddl	SC	CM	F	Prob.
Déficit \mathcal{D}	1	3.02	3.02	0.64	0.43
Type texte \mathcal{T}	1	24.02	24.02	5.07	0.03
Interaction $\mathcal{D} \times \mathcal{T}$	1	1.22	1.22	0.26	0.61
Résidu	36	170.50	4.74		
Total	39	198.77			

TABLE 7 – Analyse de variance (connotation affective)

Sources de var.	ddl	SC	CM	F	Prob.
Déficit \mathcal{D}	1	22.50	22.50	4.26	0.046
Type texte \mathcal{T}	1	40.00	40.00	7.57	0.009
Interaction $\mathcal{D} \times \mathcal{T}$	1	0.40	0.40	0.08	0.785
Résidu	36	190.20	5.28		
Total	39	253.10			

TABLE 8 – Analyse de variance (connotation neutre)

Corrélation. Droites de régression

Exercice 37 Données Budget

Il s'agit d'un extrait d'une enquête (ONU 1967) sur les budgets-temps (temps passé dans différentes activités au cours de la journée).

Les colonnes comprennent 3 variables numériques, le temps passé en : Profession (PROF), Transport (TRAN) et loisirs (LOIS). Les temps sont notés en centièmes d'heures. Le code suivant est utilisé pour identifier les lignes :

H : hommes, F : femmes, A : actifs, N : non actifs, M : mariés, C : célibataires,

U : USA, W : pays de l'ouest, E : Est sauf Yougoslavie, Y : Yougoslavie.

Budget	PROF	TRAN	LOIS	Budget	PROF	TRAN	LOIS
HAU	610	140	315	FAY	560	105	235
FAU	475	90	305	FNY	10	10	380
FNU	10	0	430	HMY	650	145	358
HMU	615	140	305	FMY	260	52	295
FMU	179	29	373	HCY	615	125	475
HCU	585	115	385	FCY	433	89	408
FCU	482	94	336	HAE	650	142	334
HAW	653	100	330	FAE	578	106	228
FAW	511	70	262	FNE	24	8	398
FNW	20	7	368	HME	652	133	310
HMW	656	97	321	FME	436	79	231
FMW	168	22	311	HCE	627	148	463
HCW	643	105	388	FCE	434	86	380
FCW	429	34	392	Moy	451	86	346
HAY	650	140	365	Ety	223	47	63

1) Représenter le nuage de points correspondant aux variables PROF et TRAN, puis celui correspondant aux variables PROF et LOIS.

2) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation pour le couple de variables (PROF, TRAN), puis pour le couple (PROF, LOIS). Dans chacun des deux cas, la corrélation est-elle significative ?

3) Déterminer l'équation de la droite de régression de TRAN selon les valeurs de PROF. Quelle est la part de la variance de TRAN qui est "expliquée" par PROF ?

Réponses : 2) $Cov(PROF, TRAN) = 9805.12$, $r(PROF, TRAN) = 0.93$; $Cov(PROF, LOIS) = -2651.87$, $r(PROF, LOIS) = -0.19$. Seule la corrélation entre PROF et TRAN est significative. L'équation de la droite de régression est : $TRAN = 0.1977 PROF - 3.15$. La part de la variance de TRAN "expliquée par" PROF est de $\frac{Var(\widehat{TRAN})}{Var(TRAN)} = r^2 = 0.87$.

Exercice 38

Quinze élèves, désignés par les lettres de A à O ont été classés une première fois par une épreuve de français, une seconde fois par une épreuve de mathématiques. Calculer le coefficient décrivant la corrélation entre ces deux classements.

Elèves	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Fran.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Math.	9	3	1	11	2	5	8	13	4	10	7	14	15	6	12

Réponses : $Cov(F, M) = 9.47$; $\rho = 0.51$. La corrélation est à peine significative à 5%. Remarquez qu'il s'agit ici d'un coefficient de corrélation des rangs. On pourra consulter le paragraphe Corrélation des rangs de Spearman d'un ouvrage de statistiques. Le coefficient de corrélation peut égelement être obtenu à l'aide de la formule :

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{N(N^2 - 1)}$$

dans laquelle N est le nombre de sujets et d_i est la différence entre le rang obtenu sur la première variable et celui obtenu sur la seconde.

Exercice 39

On mène une étude sur les variations circadiennes de la charge mentale induite par une tâche simple et répétitive. (circadien signifie "sur un cycle de 24 heures").

On considère un échantillon homogène de sujets et on relève, à différents moments de la journée :

- la vitesse d'exécution d'une tâche répétitive simple (nombre d'appuis sur un bouton par minute)
- l'indice de charge mentale induite (mesuré à partir du temps de réaction à un stimulus auditif simple).

On obtient les résultats suivants (moyennes obtenues sur l'ensemble des sujets observés).

Moment	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Vitesse	64,54	66,61	71,01	70,10	70,08	68,42	66,63	64,12	63,12
Indice	1,117	1,130	1,171	1,140	1,141	1,129	1,107	1,072	1,052

1) Construire un nuage de points en plaçant en abscisse la variable "moment de la journée", en ordonnée la vitesse, et en choisissant judicieusement les unités.

D'après ce graphique :

- semble-t-il exister une relation entre le moment de la journée et la vitesse ?
- serait-il pertinent de calculer un coefficient de corrélation linéaire pour évaluer l'intensité de cette relation ?

2) Mêmes questions pour les variables vitesse et indice de charge mentale.

3) Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire entre les variables vitesse (x_i) et indice de charge mentale (y_i). La corrélation est-elle significative au seuil de 1% ? Quelle est la part de la variance des y_i qui est "expliquée" par celle des x_i ?

Vu la faible amplitude des variations de l'indice, on aura soin de garder un nombre suffisant de décimales dans les calculs intermédiaires. On utilisera par ailleurs les résultats intermédiaires suivants :

$$\sum x_i = 604,63 ; \sum y_i = 10,059 ; \sum x_i^2 = 40686,3023, \sum y_i^2 = 11,253289 ; \sum x_i y_i = 676,53294$$

4) Déterminer une équation de la droite de régression de l'indice de charge mentale en fonction de la vitesse. Construire cette droite sur le graphique précédent.

Réponses : 1 et 2) Il semble exister une relation entre le moment de la journée et la vitesse, mais cette relation n'est pas linéaire, et ne peut donc pas être étudiée à l'aide d'un coefficient de corrélation. En revanche, il semble exister une relation linéaire entre la vitesse et l'indice de charge mentale.

3) $Cov(x_i, y_i) = \frac{676.53294}{9} - \frac{604.63}{9} \times \frac{10.059}{9} = 0.084$. $Var(x_i) = \frac{40686.3023}{9} - (\frac{604.63}{9})^2 = 7.39$.

$\sigma_x=2.72$. De même, $\sigma_y = 0.0344$ et finalement, $\rho = \frac{0.084}{2.72 \times 0.0344} = 0.899$. Il existe donc une forte corrélation positive entre ces deux variables.

4) Equation de la droite de régression : $y=0.0114 x + 0.354$

Exercice 40 Données Tailles

Le tableau ci-dessous donne la taille de 10 garçons (variable Z) ainsi que la taille de leurs parents (le père X et la mère Y).

	X	Y	Z
i1	160.0	161	165.0
i2	165.0	155	162.5
i3	170.0	155	165.0
i4	172.5	165	175.0
i5	175.0	170	180.0
i6	180.0	166	177.5
i7	185.0	167	180.0
i8	187.5	172	190.0
i9	190.0	175	195.0
i10	195.0	168	187.5

On cherche s'il existe une relation entre la taille du fils et celle de ses parents et, si oui, quelle est la part respective de la mère et du père. Pour cela, on procède à la régression de Z sur X et Y. On donne les résultats intermédiaires suivants :

$$\sum X_i = 1780; \sum Y_i = 1654; \sum Z_i = 1777,5$$

$$\sum X_i^2 = 318012.5, \sum Y_i^2 = 273974; \sum Z_i^2 = 317068.75$$

$$\sum X_i Y_i = 294932.5; \sum X_i Z_i = 317437.5; \sum Y_i Z_i = 294632.5$$

$$Var(X) = 117.25; Var(Y) = 40.24; Var(Z) = 111.81$$

$$Cov(X, Y) = 52.05; Cov(X, Z) = 104.25; Cov(Y, Z) = 63.40.$$

1) Quels sont les coefficients de corrélation des variables prises deux à deux ?

2) On utilise un logiciel de traitement statistique pour déterminer l'équation du plan de régression de Z par rapport à X et Y. On obtient :

$$Z = 0.4455X + 0.9993Y - 66.83.$$

Calculer les valeurs estimées de Z pour chacun des 10 individus statistiques (variable \hat{Z}).

On donne par ailleurs : $\sum \hat{Z}_i^2 = 317060.06$ et $\sum Z_i \hat{Z}_i = 317054.34$.

3) Déterminer le coefficient de corrélation multiple.

4) Quelle est la proportion de variance prise en compte par la régression ?

5) Les coefficients de corrélation partielle sont donnés par : $R_{xz,y} = 0.91; R_{yz,x} = 0.95$

Quel est, de la taille du père et de celle de la mère, le meilleur prédicteur de la taille du fils ?

6) Prédire la taille d'un garçon, sachant que son père mesure 188cm et sa mère 171cm.

Réponses : N.B. Calculs exécutés à l'aide d'un logiciel de traitement statistique.

1) Les coefficients de corrélation des variables prises deux à deux sont donnés par : $r(X, Y)=0.76; r(X, Z)=0.91; r(Y, Z)=0.95$.

2) Les valeurs estimées de Z sont données par :

i1	i2	i3	i4	i5	i6	i7	i8	i9	i10
165.34	161.57	163.8	174.90	181.01	179.24	182.47	188.58	192.69	187.92

3) Coefficient de corrélation multiple : $R=0.991$.

4) D'où $R^2 = 0.98$. Le modèle explique 98% de la variance observée de la variable Z. Cette proportion est très élevée, mais il s'agit de données fictives....

5) Le coefficient de corrélation partielle le plus élevé est celui liant taille de la mère et taille du fils.

6) Taille du fils si $X=188$ et $Y=171$: $Z = 188$.

Exercice 41 Données Evalcour

L'association des étudiants d'une grande université (américaine) a publié une évaluation de plus de cent cours enseignés durant le semestre précédent. Les étudiants de chaque cours avaient rempli un questionnaire d'évaluation portant sur différents aspects du cours ; l'évaluation se faisait sur une échelle en cinq points (1=très mauvais, 5=excellent). Les données figurant dans les deux tableaux 9 et 10 pages 59 et 60 sont les données réelles. Elles représentent les scores moyens enregistrés sur 6 variables pour un échantillon de 50 cours. Ces variables étaient :

Qual-Glob	Pédagogie	Examen	Connaissan	Résultat	Inscriptio
3.4	3.8	3.8	4.5	3.5	21
2.9	2.8	3.2	3.8	3.2	50
2.6	2.2	1.9	3.9	2.8	800
3.8	3.5	3.5	4.1	3.3	221
3	3.2	2.8	3.5	3.2	7
2.5	2.7	3.8	4.2	3.2	108
3.9	4.1	3.8	4.5	3.6	54
4.3	4.2	4.1	4.7	4	99
3.8	3.7	3.6	4.1	3	51
3.4	3.7	3.6	4.1	3.1	47
2.8	3.3	3.5	3.9	3	73
2.9	3.3	3.3	3.9	3.3	25
4.1	4.1	3.6	4	3.2	37
2.7	3.1	3.8	4.1	3.4	83
3.9	2.9	3.8	4.5	3.7	70
4.1	4.5	4.2	4.5	3.8	16
4.2	4.3	4.1	4.5	3.8	14
3.1	3.7	4	4.5	3.7	12
4.1	4.2	4.3	4.7	4.2	20
3.6	4	4.2	4	3.8	18
4.3	3.7	4	4.5	3.3	260
4	4	4.1	4.6	3.2	100
2.1	2.9	2.7	3.7	3.1	118
3.8	4	4.4	4.1	3.9	35
2.7	3.3	4.4	3.6	4.3	32

TABLE 9 – Première partie des données

1. la qualité globale des exposés (Qual-Glob)
2. les aptitudes pédagogiques du professeur (Pédagogie)

Qual-Glob	Pédagogie	Examen	Connaissan	Résultat	Inscriptio
4.4	4.4	4.3	4.4	2.9	25
3.1	3.4	3.6	3.3	3.2	55
3.6	3.8	4.1	3.8	3.5	28
3.9	3.7	4.2	4.2	3.3	28
2.9	3.1	3.6	3.8	3.2	27
3.7	3.8	4.4	4	4.1	25
2.8	3.2	3.4	3.1	3.5	50
3.3	3.5	3.2	4.4	3.6	76
3.7	3.8	3.7	4.3	3.7	28
4.2	4.4	4.3	5	3.3	85
2.9	3.7	4.1	4.2	3.6	75
3.9	4	3.7	4.5	3.5	90
3.5	3.4	4	4.5	3.4	94
3.8	3.2	3.6	4.7	3	65
4	3.8	4	4.3	3.4	100
3.1	3.7	3.7	4	3.7	105
4.2	4.3	4.2	4.2	3.8	70
3	3.4	4.2	3.8	3.7	49
4.8	4	4.1	4.9	3.7	64
3	3.1	3.2	3.7	3.3	700
4.4	4.5	4.5	4.6	4	27
4.4	4.8	4.3	4.3	3.6	15
3.4	3.4	3.6	3.5	3.3	40
4	4.2	4	4.4	4.1	18
3.5	3.4	3.9	4.4	3.3	90

TABLE 10 – Seconde partie des données

3. la qualité des tests et examens (Examen)
4. la connaissance de la matière dont témoigne le professeur, telle qu'elle est perçue par les étudiants (Connaissan)
5. les résultats auxquels s'attendent les étudiants pour ce cours (Résultat, de très bon à insuffisant)
6. le nombre d'inscriptions à ce cours (Inscriptio)

Les résultats de statistiques descriptives concernant les variables précédentes sont donnés dans le tableau 11.

Les coefficients de corrélation des variables prises deux à deux sont donnés dans le tableau 12.

Les coefficients de l'équation de régression multiple de la première variable en fonction des cinq autres sont donnés par le tableau 13.

Ecrire l'équation de régression correspondante, et la vérifier sur l'extrait donné dans le tableau 14.

Enfin, le dernier tableau (tableau 15) donne les coefficients de corrélation partiels entre la variable Qual-Glob et les prédicteurs.

	Qual-Glob	Pedagogie	Examen	Connaissan	Resultat	Inscriptio
Effectif	50	50	50	50	50	50
Moyenne	3.55	3.664	3.808	4.176	3.486	88.0
Variance	0.376429	0.283167	0.2432	0.166351	0.123269	21042.2
Ecart-type	0.613538	0.532135	0.493153	0.407862	0.351097	145.059

TABLE 11 – Statistiques descriptives sur les données

	Qual-Glob	Pedagogie	Examen	Connaissan	Resultat	Inscriptio
Qual-Glob	1	0.8039	0.5956	0.6818	0.3008	-0.2396
Pedagogie	0.8039	1	0.7197	0.5263	0.4691	-0.4511
Examen	0.5956	0.7197	1	0.4515	0.6100	-0.5581
Connaissan	0.6818	0.5263	0.4515	1	0.2242	-0.1279
Resultat	0.3008	0.4691	0.6100	0.2242	1	-0.3371
Inscriptio	-0.2396	-0.4511	-0.5581	-0.1279	-0.3371	1

TABLE 12 – Coefficients de corrélation

Paramètre	Estimation
CONSTANTE	-1.19483
Inscriptio	0.000525491
Examen	0.131981
Resultat	-0.184308
Connaissan	0.488984
Pedagogie	0.763237

TABLE 13 – Coefficients de l'équation de de régression

Ligne	Observé	Ajusté	Résidu
1	3.4	3.77339	-0.373387
2	2.9	2.6592	0.240795
3	2.6	2.54643	0.0535724
4	3.8	3.45119	0.348812
5	3.0	2.74242	0.257584

TABLE 14 – Comparaison des valeurs observées et des valeurs ajustées

Régresseur	Coef
Pedagogie	0,6544
Examen	0,1213
Connaissan	0,4751
Resultat	-0,1656
Inscriptio	0,1990

TABLE 15 – Coefficients de corrélation partielle

La valeur du coefficient de corrélation multiple vérifie : $R^2 = 0.755$.

Exercice 42

Aux élections européennes de juin 1984, les votes pour la liste du Front National ont été très variables dans l'espace et leur comparaison avec d'autres variables fait apparaître un certain nombre de relations. Les variables choisies dans le tableau 16 sont les suivantes :

- LPEN : pourcentage de voix de la liste FN ;
- ETRA : pourcentage d'étrangers dans la population en 1982 ;
- DELI : Nombre pondéré de délinquance pour 100 habitants en 1980 ;
- CRCH : Taux mensuel moyen d'évolution du chômage entre le 31.08.81 et le 30.04.83 ;
- TXCH : Pourcentage de chômeurs dans la population active au 30.09.83 ;
- URBA : Pourcentage de population urbaine en 1982.

Les individus statistiques sont ici les régions de France Métropolitaine (ILEF=Ile de France, CHAM=Champagne-Ardenne, etc.). L'échelle régionale n'est certainement pas la meilleure pour une telle étude et les conclusions valent pour les agrégats spatiaux et non des personnes.¹

REG	LEPEN	ETRA	DELI	CRCH	TXCH	URBA
ILEF	14.5	13.3	6	0.23	7.1	93.6
CHAM	10.7	5.4	4	0.07	9.5	62.4
PICA	10.8	4.6	4	0.22	9.7	60.7
HNOR	8.9	3.3	4	0.01	11	69.1
CENT	9.3	5.1	3	0.51	7.8	62.9
BNOR	7.6	1.7	4	0.38	9.8	53.4
BOUR	10.1	5.4	3	0.72	8.6	57.9
NORD	9.1	4.8	4	0.21	11.8	86.4
LORR	12.4	8	4	0.51	9.2	72.4
ALSA	12.5	8.1	3	1.25	7.4	73.2
FCOM	12	7.4	4	0.19	8.2	58.8
PAYS	6.8	1.4	3	0.58	9.6	60.1
BRET	6.8	0.7	3	0.84	9.4	55.6
POIT	6.7	1.7	3	0.48	10	50.5
AQUI	8.3	4.6	4	0.85	9.5	64.6
MIDI	8.1	4.8	3	0.54	8.5	59.3
LIMO	4.8	2.7	3	0.57	6.9	50.9
RHON	12.9	9.1	4	0.57	7.5	76.9
AUVE	7.4	4.6	2	0.85	8.3	58.2
LANG	13.2	6.5	4	1.44	11.4	70.7
PROV	19	8.2	6	1.13	10.5	89.6

TABLE 16 – Voix du FN aux élections européennes de 1984

Le tableau 17 donne les valeurs des coefficients de corrélation des variables prises deux à deux. On voit que les votes pour l'extrême droite sont fortement corrélés à trois variables : taux d'urbanisation (URBA), taux de délinquance (DELI) et taux d'étrangers

1. D'après *Initiation aux méthodes statistiques en Géographie*, Groupe Chadule, Masson Ed., 1994

(ETRA). D'autre part, ces trois variables sont fortement corrélées entre elles, elles sont donc partiellement redondantes.

	LEPEN	ETRA	DELI	CRCH	TXCH	URBA
LEPEN	1	0.81	0.76	0.25	0.05	0.77
ETRA		1	0.62	0.08	-0.35	0.76
DELI			1	-0.14	0.19	0.75
CRCH				1	0.00	0.08
TXCH					1	0.13
URBA						1

TABLE 17 – Corrélations entre les variables

Une première régression multiple est réalisée en utilisant les 5 variables explicatives. Le coefficient de corrélation multiple vaut $R = 0.934$ et le coefficient de détermination, $R^2 = 0.872$

Les coefficients de corrélation partielle entre la variable LEPEN et chacune des autres variables sont alors ceux indiqués dans le tableau 18.

	ETRA	DELI	CRCH	TXCH	URBA
LEPEN	0.6910802	0.52652694	0.5494687	0.45550366	-0.2161422

TABLE 18 – Corrélations partielles entre LEPEN et les 5 variables

On peut tester la significativité de ces coefficients de corrélation. Le nombre de degrés de liberté à prendre en compte est $21 - 6 = 15$. Au seuil de 5%, $r_{crit} = 0.4821$.

On retire alors la variable qui a le plus faible coefficient de corrélation partielle, c'est-à-dire URBA et on réalise une régression multiple de la variable LEPEN par rapport aux quatre variables explicatives restantes.

On trouve alors : $R = 0.930$, $R^2 = 0.865$ et les nouveaux coefficients de corrélation partielle indiqués dans le tableau 19. Notons que R ne change pratiquement pas : la variable URBA n'apporte pas d'information supplémentaire par rapport aux quatre variables restantes.

	ETRA	DELI	CRCH	TXCH
LEPEN	0.73354021	0.49258622	0.5282723	0.4116398

TABLE 19 – Corrélations partielles entre LEPEN et 4 variables

Pour tester la significativité de ces coefficients, on prend ici $ddl = 16$ et donc $r_{crit} = 0.4683$. Retirons de même la variable qui a le plus faible coefficient de corrélation partielle, c'est-à-dire TXCH.

On trouve alors : $R = 0.915$, $R^2 = 0.838$ et les coefficients de corrélation partielle du tableau 20.

A ce stade, $r_{crit} = 0.4683$, et tous les coefficients sont significatifs. On peut donc dire que les votes pour l'extrême-droite aux élections européennes de 1984, à l'échelle régionale,

	ETRA	DELI	CRCH
LEPEN	0.6829056	0.6825633	0.5516189

TABLE 20 – Corrélation partielle entre LEPEN et 3 variables

ont varié en fonction de trois circonstances : le taux d'étrangers, le taux de délinquance, et à un degré moindre, l'évolution du chômage.

La régression n'a pas été faite dans un but de prévision, et l'équation de régression n'a qu'un intérêt limité :

$$LPEN = 0.52 \text{ ETRA} + 1.69 \text{ DELI} + 2.37 \text{ CRCH} - 0.4$$

Analyse en composantes principales

Exercice 43 Données Budget-temps

Il s'agit d'une enquête (ONU 1967) sur les budgets-temps (temps passé dans différentes activités au cours de la journée).

Le tableau suivant comprend 10 variables numériques et 4 variables catégorisées.

Les 10 variables numériques sont : le temps passé en : Profession, Transport, Ménage, Enfants, Courses, Toilette, Repas, Sommeil, Télé, Loisirs.

Les 4 variables catégorisées sont : Le sexe (1=Hommes 2=Femmes), l'activité (1=Actifs 2=Non Act. 9=Non précisé), l'état civil (1=Célibataires 2=Mariés 9=Non précisé), le Pays (1=USA 2=Pays de l'Ouest 3=Pays de l'Est 4=Yougoslavie).

Le code suivant est utilisé pour identifier les lignes : H : Hommes, F : Femmes, A : Actifs, N : Non Actifs(ves), M : Mariés, C : Célibataires, U : USA, W : Pays de l'Ouest sauf USA, E : Est sauf Yougoslavie, Y : Yougoslavie

Les temps sont notés en centièmes d'heures. La première case en haut à gauche du tableau (HAU) indique que les Hommes Actifs des USA passent en moyenne 6 heures et 6 minutes (6 heures + 10/100 d'heure, soit 6 heures et 6mn) en activité PROFESSIONNELLE. Le total d'une ligne (sur ces 10 variables numériques) est 2400 (24 heures).

	PROF	TRAN	MENA	ENFA	COUR	TOIL	REPA	SOMM	TELE	LOIS	SEX	ACT	CIV	PAY
HAU	610	140	60	10	120	95	115	760	175	315	1	1	9	1
FAU	475	90	250	30	140	120	100	775	115	305	2	1	9	1
FNU	10	0	495	110	170	110	130	785	160	430	2	2	9	1
HMU	615	140	65	10	115	90	115	765	180	305	1	9	2	1
FMU	179	29	421	87	161	112	119	776	143	373	2	9	2	1
HCU	585	115	50	0	150	105	100	760	150	385	1	9	1	1
FCU	482	94	196	18	141	130	96	775	132	336	2	9	1	1
HAW	653	100	95	7	57	85	150	808	115	330	1	1	9	2
FAW	511	70	307	30	80	95	142	816	87	262	2	1	9	2
FNW	20	7	568	87	112	90	180	843	125	368	2	2	9	2
HMW	656	97	97	10	52	85	152	808	122	321	1	9	2	2
FMW	168	22	528	69	102	83	174	824	119	311	2	9	2	2
HCW	643	105	72	0	62	77	140	813	100	388	1	9	1	2
FCW	429	34	262	14	92	97	147	849	84	392	2	9	1	2
HAY	650	140	120	15	85	90	105	760	70	365	1	1	9	4
FAY	560	105	375	45	90	90	95	745	60	235	2	1	9	4
FNY	10	10	710	55	145	85	130	815	60	380	2	2	9	4
HMY	650	145	112	15	85	90	105	760	80	358	1	9	2	4
FMY	260	52	576	59	116	85	117	775	65	295	2	9	2	4
HCY	615	125	95	0	115	90	85	760	40	475	1	9	1	4
FCY	433	89	318	23	112	96	102	774	45	408	2	9	1	4
HAE	650	142	122	22	76	94	100	764	96	334	1	1	9	3
FAE	578	106	338	42	106	94	92	752	64	228	2	1	9	3
FNE	24	8	594	72	158	92	128	840	86	398	2	2	9	3
HME	652	133	134	22	68	94	102	763	122	310	1	9	2	3
FME	436	79	433	60	119	90	107	772	73	231	2	9	2	3
HCE	627	148	68	0	88	92	86	770	58	463	1	9	1	3
FCE	434	86	297	21	129	102	94	799	58	380	2	9	1	3

Matrice des corrélations :

	PROF	TRAN	MENA	ENFA	COUR	TOIL	REPA	SOMM	TELE	LOIS
PROF	1.000	0.933	-0.908	-0.870	-0.658	-0.112	-0.455	-0.538	-0.059	-0.190
TRAN	0.933	1.000	-0.869	-0.809	-0.503	-0.079	-0.613	-0.702	-0.044	-0.105
MENA	-0.908	-0.869	1.000	0.861	0.501	-0.035	0.361	0.433	-0.206	-0.113
ENFA	-0.870	-0.809	0.861	1.000	0.543	0.124	0.367	0.277	0.122	-0.109
COUR	-0.658	-0.503	0.501	0.543	1.000	0.593	-0.184	-0.030	0.216	0.235
TOIL	-0.112	-0.079	-0.035	0.124	0.593	1.000	-0.360	-0.217	0.322	0.073
REPA	-0.455	-0.613	0.361	0.367	-0.184	-0.360	1.000	0.817	0.316	-0.040
SOMM	-0.538	-0.702	0.433	0.277	-0.030	-0.217	0.817	1.000	0.018	0.208
TELE	-0.059	-0.044	-0.206	0.122	0.216	0.322	0.316	0.018	1.000	-0.095
LOIS	-0.190	-0.105	-0.113	-0.109	0.235	0.073	-0.040	0.208	-0.095	1.000

Valeurs propres :

Valeur propre	4.5887	2.1198	1.3210	1.1953	0.4684	0.1990
Proportion	0.459	0.212	0.132	0.120	0.047	0.020
Cumulatif	0.459	0.671	0.803	0.922	0.969	0.989

Valeur propre	0.0468	0.0371	0.0239	0.0000
Proportion	0.005	0.004	0.002	0.000
Cumulatif	0.994	0.998	1.000	1.000

Scores des individus sur les quatre premières composantes principales :

	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4
HAU	-1.77294	-0.68605	-1.8713	0.5752
FAU	-0.17159	-2.21532	-0.6608	0.4376
FNU	4.05340	-2.27771	-1.0605	-0.5203
HMU	-1.77937	-0.29267	-1.8851	0.7330
FMU	2.61426	-2.28530	-0.7972	0.1076
HCU	-1.50279	-1.89173	-1.3630	-0.7823
FCU	-0.46524	-2.84430	-1.2964	-0.1476
HAW	-1.17634	2.36768	-1.1166	-0.0458
FAW	0.31200	1.49528	-0.2724	0.9433
FNW	4.32338	1.63256	-0.8903	-0.1438
HMW	-1.12538	2.46392	-1.2856	0.1503
FMW	3.13128	1.98892	-0.5882	0.7346
HCW	-1.37003	2.57197	-0.5263	-1.0228
FCW	1.09911	1.65514	-0.5433	-1.4957
HAY	-2.16270	0.24105	0.7089	-0.2393
FAY	-1.00478	-0.18007	1.6157	2.1323
FNY	3.53743	0.37708	1.6353	-0.5295
HMY	-2.22120	0.21162	0.4832	-0.1096
FMY	1.53997	0.21607	1.6214	1.1658
HCY	-2.13527	-0.58062	1.6098	-2.1775
FCY	-0.33581	-0.41823	1.4906	-1.0249
HAE	-2.14681	0.06942	0.1312	0.3216
FAE	-0.98772	-0.58543	1.3654	2.0399
FNE	3.91870	-0.04945	0.6719	-0.9754
HME	-2.07739	0.17048	-0.4251	0.7923
FME	0.49043	-0.20397	1.1839	2.0125
HCE	-2.52945	-0.14681	1.0625	-1.9634
FCE	-0.05515	-0.80353	1.0024	-0.9678

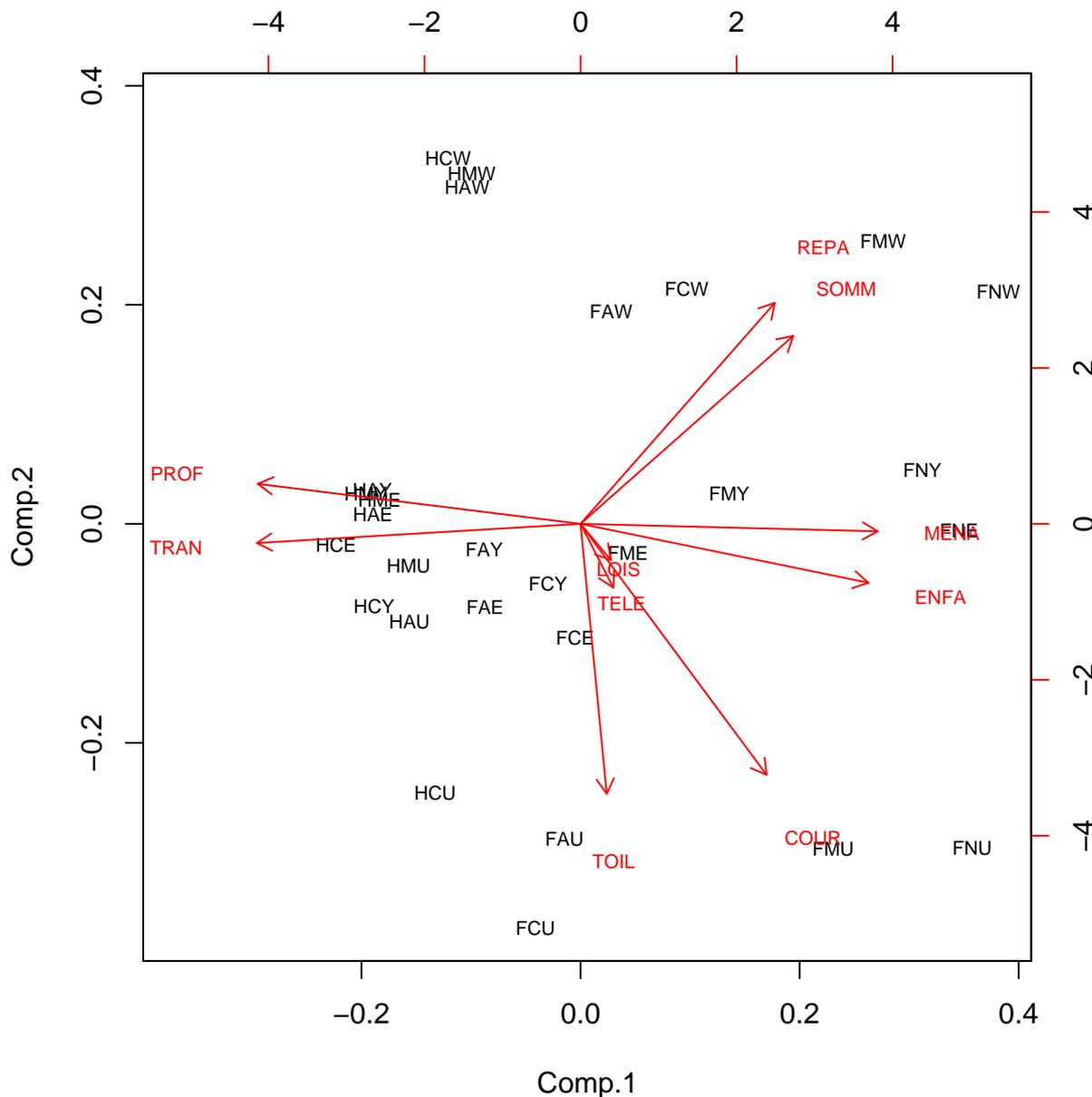
Qualités des représentations des individus par les deux premières composantes principales ;
Qualités des représentations des individus par le plan (CP1, CP2)

	Comp.1	Comp.2		QLT
HAU	0.36370	0.05446	HAU	0.4182
FAU	0.004113	0.685605	FAU	0.6897
FNU	0.6578	0.2077	FNU	0.8655
HMU	0.34597	0.00936	HMU	0.3553
FMU	0.5164	0.3946	FMU	0.911
HCU	0.2456	0.3893	HCU	0.6349
FCU	0.01697	0.63414	FCU	0.6511
HAW	0.1658	0.6717	HAW	0.8376
FAW	0.01998	0.45887	FAW	0.4789
FNW	0.8274	0.1180	FNW	0.9454
HMW	0.1383	0.6628	HMW	0.801
FMW	0.6598	0.2662	FMW	0.926
HCW	0.1883	0.6635	HCW	0.8518
FCW	0.1400	0.3174	FCW	0.4574
HAY	0.83446	0.01037	HAY	0.8448
FAY	0.12174	0.00391	FAY	0.1256
FNY	0.755444	0.008584	FNY	0.764
HMY	0.889909	0.008078	HMY	0.898
FMY	0.35148	0.00692	FMY	0.3584
HCY	0.3598	0.0266	HCY	0.3863
FCY	0.03024	0.04690	FCY	0.07714
HAE	0.8926394	0.0009335	HAE	0.8936
FAE	0.13047	0.04583	FAE	0.1763
FNE	0.8752373	0.0001394	FNE	0.8754
HME	0.742612	0.005001	HME	0.7476
FME	0.040219	0.006957	FME	0.04718
HCE	0.543018	0.001829	HCE	0.5448
FCE	0.0008598	0.182535	FCE	0.1834

Saturations des variables ; qualité de la représentation des variables dans le plan (CP1,CP2)

	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4		QLT
PROF	-0.97717	0.12105	-0.084576	0.06694	PROF	0.96952
TRAN	-0.97978	-0.05812	-0.008394	0.04555	TRAN	0.96335
MENA	0.89990	-0.02265	0.362434	0.21417	MENA	0.81034
ENFA	0.87210	-0.17857	0.083731	0.29445	ENFA	0.79244
COUR	0.56359	-0.76062	-0.004560	-0.12104	COUR	0.89617
TOIL	0.07951	-0.81809	-0.302164	-0.06355	TOIL	0.67560
REPA	0.58834	0.66937	-0.426308	0.01414	REPA	0.79419
SOMM	0.64418	0.56930	-0.190853	-0.31249	SOMM	0.73907
TELE	0.09944	-0.19309	-0.930046	0.15125	TELE	0.04717
LOIS	0.09218	-0.11026	0.030219	-0.95745	LOIS	0.02065

Projection du nuage selon les deux premières composantes principales



- 1) Combien de composantes principales proposez-vous pour résumer ces données?
- 2) Quelles sont les coordonnées de l'individu HCU sur les composantes CP1 et CP2. Essayer de placer le point sur le graphique. De même, quelles sont les saturations de la variable PROF sur CP1 et CP2. Les retrouve-t-on sur le graphique? Que peut-on penser des graduations des axes fournies par le logiciel?
- 3) Examiner le tableau des corrélations. Quelles variables apparaissent fortement corrélées entre elles?

- 4) Quelles sont les variables qui sont bien représentées dans le plan (CP1, CP2) ? Comment retrouve-t-on sur le graphique les corrélations entre ces variables ?
- 5) Les variables LOIS et TELE apparaissent proches sur le graphique, alors que leur coefficient de corrélation est faible. Comment peut-on l'expliquer ?
- 6) Les points HMW, HCW, HAW apparaissent très proches sur le graphique. Est-ce le cas dans la réalité ?
- 7) Quelles sont les variables les mieux corrélées à l'axe CP1 ? Quels sont les individus qui participent le plus à l'inertie de cet axe ? Exprimer les résultats relatifs à l'axe CP1 en termes d'oppositions.
- 8) Même question pour l'axe CP2.
- 9) Quelles sont les variables dont l'étude nécessiterait de s'intéresser à CP3, CP4, ... ?

Exercice 44 Données Psychométrie

Pour 20 élèves (sujets s1 à s20), on a relevé les notes obtenues à cinq épreuves individuelles : Combinatoire (*Comb*), Probabilités (*Prob*), Logique (*Logi*), notées de 0 à 10, QI verbal (*QI*, notes de 85 à 125) et Mathématiques (*Math*), notée de 0 à 20. Pour chaque sujet, on dispose de deux informations : *Pédagogie* avec deux modalités *p1* (moderne) et *p2* (traditionnelle), *Milieu* avec deux modalités *m1* (favorisé) et *m2* (défavorisé).

	Comb	Prob	Logi	QI	Math	Peda	Milieu
s1	3.9	4.1	6	99	8	p1	m1
s2	5	5	5.2	122	10	p1	m1
s3	5.3	8.5	8.6	108	14	p1	m1
s4	8.3	6.2	7.2	125	18	p1	m1
s5	5.5	6	6.9	108	5	p1	m2
s6	6.6	7.7	5.8	113	7	p1	m2
s7	5.5	3	5.8	94	10	p1	m2
s8	2.2	4.5	3.3	85	9	p1	m2
s9	5.3	4.5	8.3	112	10	p1	m2
s10	5.3	6.4	6.5	125	12	p1	m2
s11	4.6	4.6	5.2	108	14	p1	m2
s12	3.7	4.1	7.2	91	15	p1	m2
s13	4.1	6.7	7.1	91	6	p2	m1
s14	2.7	4.5	3	109	9	p2	m1
s15	6.8	4.5	7.1	125	12	p2	m1
s16	2.7	3.7	6.9	94	13	p2	m1
s17	5.4	8.9	7.3	120	15	p2	m1
s18	6.2	4.7	4.4	112	7	p2	m2
s19	2.5	4.7	7.2	106	11	p2	m2
s20	2.4	4.4	5.2	91	12	p2	m2

Analyse en composantes principales

On réalise une ACP normée sur les 4 variables Comb, Prob, Logi et Math. L'essentiel des résultats obtenus est indiqué ci-dessous.

Matrice des corrélations

	Comb	Prob	Logi	Math
Comb	1.0000	0.3959	0.3539	0.1512
Prob	0.3959	1.0000	0.3818	0.1114
Logi	0.3539	0.3818	1.0000	0.3476
Math	0.1512	0.1114	0.3476	1.0000

Valeurs propres :

Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4
1.8956	0.9533	0.6152	0.5359

Scores, contributions et qualités des individus sur les deux premières composantes :

	QUAL	Comp.1	Ctr	Qual	Comp.2	Ctr	Qual
s1	0.7262	1.0687	0.0301	0.6995	-0.20869	0.0023	0.0267
s2	0.5606	0.50711	0.0068	0.4092	-0.30848	0.0050	0.1514
s3	0.8181	-2.53314	0.1693	0.8175	0.06783	0.0002	0.0006
s4	0.7363	-2.63021	0.1825	0.6665	0.85088	0.0380	0.0698
s5	0.7694	-0.08609	0.0002	0.0020	-1.70358	0.1522	0.7675
s6	0.9575	-0.79544	0.0167	0.1240	-2.06208	0.2230	0.8335
s7	0.2462	0.77573	0.0159	0.2294	0.21026	0.0023	0.0169
s8	0.8419	2.4237	0.1549	0.8417	-0.04369	0.0001	0.0003
s9	0.1687	-0.63765	0.0107	0.1592	0.15502	0.0013	0.0094
s10	0.8293	-0.78804	0.0164	0.8143	-0.10687	0.0006	0.0150
s11	0.5290	0.31604	0.0026	0.0618	0.86867	0.0396	0.4672
s12	0.9548	-0.12761	0.0004	0.0053	1.70023	0.1516	0.9494
s13	0.5104	-0.06279	0.0001	0.0012	-1.32119	0.0915	0.5093
s14	0.8166	2.38174	0.1496	0.8114	-0.19066	0.0019	0.0052
s15	0.3201	-0.87163	0.0200	0.3089	0.16597	0.0014	0.0112
s16	0.8267	0.66734	0.0117	0.1364	1.50142	0.1182	0.6903
s17	0.7030	-2.30108	0.1397	0.7030	0.01647	0.0000	0.0000
s18	0.6412	0.87576	0.0202	0.1953	-1.32301	0.0918	0.4458
s19	0.3743	0.50761	0.0068	0.1042	0.81711	0.0350	0.2701
s20	0.8581	1.30995	0.0453	0.5769	0.91441	0.0439	0.2811

Coefficients des variables :

	Comp.1	Comp.2	Comp.3	Comp.4
Comb	-0.517	-0.354	-0.779	0.000
Prob	-0.518	-0.431	0.521	0.524
Logi	-0.570	0.183	0.322	-0.733
Math	-0.373	0.809	-0.136	0.433

Saturations, contributions et qualité des variables (2 premières composantes)

	QLT	Comp.1	Ctr	Qual	Comp.2	Qual
Comb	0.6265	-0.7121	0.2675	0.5071	-0.3455	0.1252
Prob	0.6861	-0.7133	0.2684	0.5088	-0.4211	0.1860
Logi	0.6480	-0.7848	0.3249	0.6160	0.1791	0.0336
Math	0.8883	-0.5135	0.1391	0.2637	0.7903	0.6551

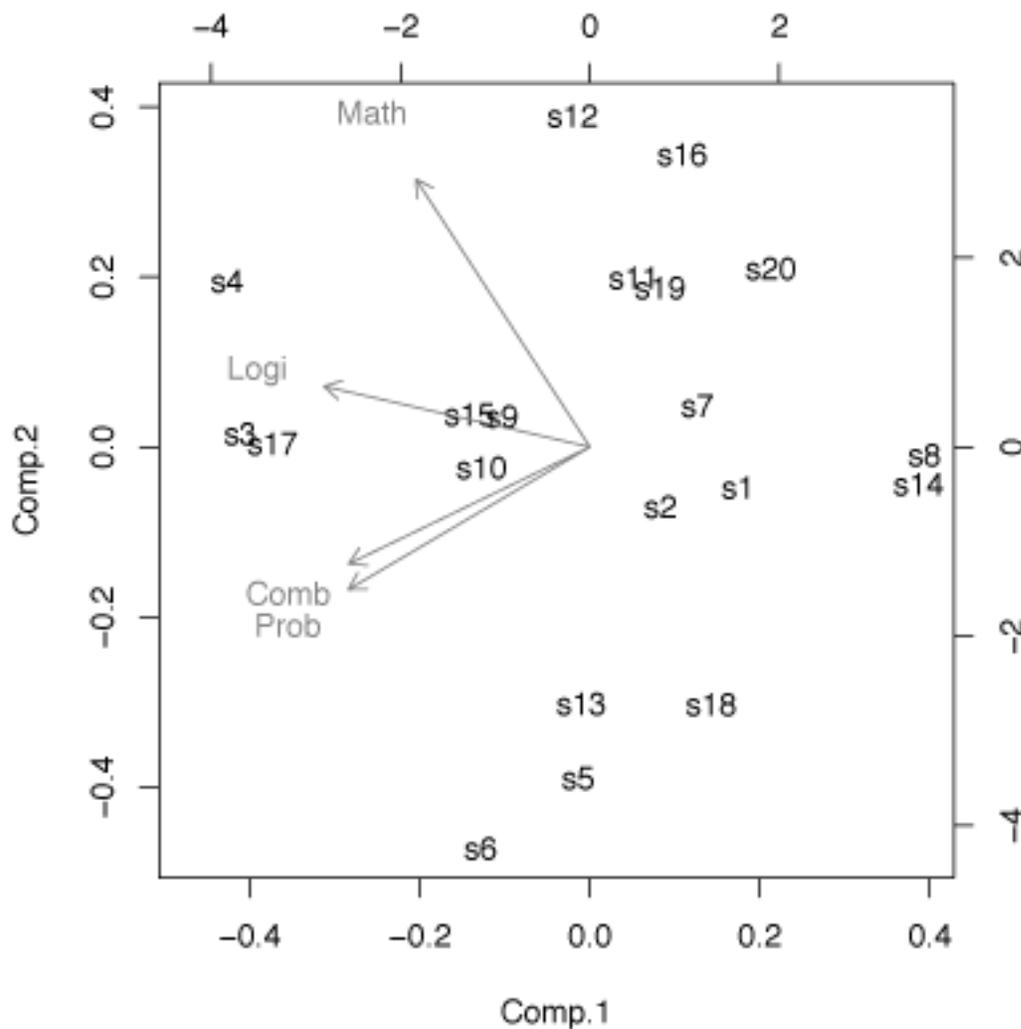


FIGURE 2 – Cas Psychométrie

- 1) Quelles sont les coordonnées de l'individu s12 sur les composantes CP1 et CP2. Essayer de placer le point sur le graphique. De même, quelles sont les saturations de la variable Math sur CP1 et CP2. Les retrouve-t-on sur le graphique? Que peut-on penser des graduations des axes fournies par le logiciel?
- 2) Examiner et commenter le tableau des corrélations.
- 3) Les variables Comb et Proba apparaissent proches sur le graphique. Quel est pourtant leur coefficient de corrélation? Comment peut-on l'expliquer?
- 4) Les points s8 et s14 apparaissent très proches sur le graphique. Est-ce le cas dans la réalité? Même question pour s9 et s15.
- 5) Comment les variables contribuent-elles à la formation de l'axe CP1? Comment cet axe classe-t-il les individus?

6) Comment les variables contribuent-elles à la formation de l'axe CP2 ? Décrire cet axe en termes d'oppositions entre variables, en termes d'oppositions entre individus.

7) L'étude limitée aux deux premières composantes vous paraît-elle suffisante ? Comment souhaiteriez-vous poursuivre cette étude ?

Analyse factorielle des correspondances

Exercice 45 Données Conjoint

Le tableau ci-dessous rapporte les Circonstances de rencontre de 9675 couples (14 Circonstances) selon leur catégorie socio-professionnelle (16 CSP en lignes). Il s'agit d'un tableau de contingence. Ainsi 9 Agriculteurs de Grande exploitation (AGRD) se sont rencontrés lors de leurs études (ETUD).

Circonstances de rencontre

Au cours des Etudes (ETUD), sur le lieu de Vacances (VACA), lors d'une Fête entre Amis (FTAM), dans une Association, Sportive par exemple (ASPO), au Travail (TRAV), lors d'une rencontre chez des Particuliers (PART), par Annonce ou agence (ANNO), lors d'une Fête de Famille (FTFM), en Boîte ou Discothèque (BOIT), lors d'une sortie ou Spectacle (SPEC), lors d'une Fête Publique (FTPB), par Voisinage (VOIS), dans un lieu Public (PUBL) ou au Bal (BAL).

Catégories socio-professionnelle (CSP)

Agriculteurs de Grande (AGRD) ou Petite exploitation (APTI), Ouvriers Non Qualifiés (ONOQ), Ouvriers qualifiés de type Artisan (OART), Ouvriers dans les Transports (OTRA) ou Ouvriers dans l'Industrie (OIND), Artisans (ARTI), Commerçant (COMM), Employés de la Fonction publique (EFCT) ou d'Entreprise (EENT), Professions Intermédiaires de type Contremaître (PCTR) ou de la Santé (PSAN) ou de la Fonction Publique (PFON), Ingénieur ou Cadre d'Entreprise (CENT), Profession Libérale ou Chef d'Entreprise (PLCE), Cadre de la Fonction publique (CFON).

Source : Adapté par l'Université René Descartes, UFR Institut de Psychologie à partir d'une enquête de l'INED, Enquête "Formation des couples", 1984, d'après M. Bozon (1992) Le choix du conjoint in F. de Singly (Ed) La Famille, l'état des savoirs, Ed. La Découverte.

	ETUD	VACA	FTAM	ASPO	TRAV	PART	ANNO	FTFM	BOIT	SPEC	FTPB	VOIS	PUBL	BAL
AGRD	9	8	23	27	17	22	8	12	4	19	15	15	27	150
APTI	12	12	16	28	21	33	0	16	8	43	20	20	39	64
ONOQ	19	5	33	19	86	58	4	23	25	30	30	30	131	191
OART	28	46	63	54	120	103	0	85	65	44	63	63	211	238
OTRA	21	35	44	57	63	67	0	46	39	40	18	18	77	124
OIND	52	32	67	72	67	76	28	57	71	59	64	64	134	217
ARTI	12	29	18	38	70	30	4	12	38	16	13	13	61	110
COMM	14	5	14	11	66	29	8	8	12	12	4	4	42	63
EFCT	34	18	14	29	78	27	0	32	14	17	17	17	69	91
EENT	45	32	38	43	105	74	13	35	24	8	13	13	90	66
PCTR	48	53	84	106	93	107	4	63	36	17	17	17	89	142
PSAN	83	56	72	97	119	59	9	15	49	22	24	24	108	67
PEON	102	45	55	95	103	42	4	22	12	8	8	9	64	37
CENT	93	76	64	59	81	50	0	26	14	9	23	23	72	40
PLCE	60	22	43	22	22	20	0	8	9	0	8	8	16	23
CEON	83	38	34	55	84	30	4	8	17	1	12	12	35	9

Principaux résultats fournis par Minitab

Axe	Inertie	Proportion	Cumulé	Histogramme
1	0,1203	0,5766	0,5766	*****
2	0,0219	0,1051	0,6818	*****
3	0,0168	0,0807	0,7625	****
4	0,0140	0,0669	0,8294	***
5	0,0112	0,0535	0,8829	**
6	0,0092	0,0443	0,9272	**
7	0,0062	0,0298	0,9570	*
8	0,0034	0,0163	0,9733	
9	0,0028	0,0133	0,9867	
10	0,0020	0,0098	0,9965	
11	0,0005	0,0026	0,9991	
12	0,0002	0,0009	1,0000	
Total	0,2086			

Contribution des lignes

		--Composante 1--			--Composante 2--			--Composante 3--					
ID	Nom	Qual	Mass	Inert	Coord	Corr	Contr	Coord	Corr	Contr	Coord	Corr	Contr
1	AGRD	0,908	0,037	0,100	-0,532	0,499	0,087	-0,231	0,094	0,090	0,422	0,315	0,390
2	APTI	0,592	0,034	0,060	-0,334	0,305	0,032	-0,296	0,239	0,137	-0,132	0,048	0,036
3	ONOQ	0,824	0,071	0,077	-0,403	0,719	0,095	0,130	0,075	0,054	0,083	0,030	0,029
4	OART	0,866	0,122	0,074	-0,280	0,621	0,079	0,039	0,012	0,008	-0,171	0,233	0,213
5	OTRA	0,573	0,067	0,027	-0,159	0,302	0,014	-0,054	0,035	0,009	-0,141	0,236	0,079
6	OIND	0,635	0,110	0,079	-0,263	0,457	0,063	-0,158	0,164	0,124	0,045	0,013	0,013
7	ARTI	0,430	0,048	0,030	-0,178	0,243	0,013	0,140	0,151	0,043	0,069	0,036	0,013
8	COMM	0,831	0,030	0,035	-0,145	0,086	0,005	0,360	0,531	0,179	0,229	0,214	0,094
9	EFCT	0,320	0,047	0,020	-0,090	0,091	0,003	0,143	0,228	0,044	-0,010	0,001	0,000
10	EENT	0,639	0,062	0,033	0,127	0,146	0,008	0,233	0,490	0,153	-0,021	0,004	0,002
11	PCTR	0,130	0,091	0,041	0,072	0,055	0,004	-0,027	0,008	0,003	-0,079	0,067	0,034
12	PSAN	0,697	0,083	0,046	0,284	0,692	0,056	0,026	0,006	0,002	0,003	0,000	0,000
13	PFON	0,922	0,063	0,106	0,563	0,902	0,165	0,009	0,000	0,000	0,083	0,019	0,025
14	CENT	0,855	0,065	0,087	0,469	0,790	0,119	-0,105	0,040	0,033	-0,084	0,025	0,027
15	PLCE	0,811	0,027	0,080	0,625	0,632	0,088	-0,309	0,154	0,117	0,122	0,024	0,024
16	CFON	0,943	0,044	0,106	0,683	0,923	0,169	0,040	0,003	0,003	0,093	0,017	0,022

Contribution des colonnes

		---Composante 1---			---Composante 2---			---Composante 3---					
ID	Nom	Qual	Mass	Inert	Coord	Corr	Contr	Coord	Corr	Contr	Coord	Corr	Contr
1	ETUD	0,940	0,074	0,210	0,723	0,882	0,322	-0,118	0,024	0,047	0,143	0,034	0,090
2	VACA	0,812	0,053	0,069	0,449	0,738	0,089	-0,090	0,030	0,020	-0,110	0,044	0,038
3	FTAM	0,729	0,070	0,045	0,265	0,530	0,041	-0,162	0,198	0,084	0,012	0,001	0,001
4	ASPO	0,623	0,084	0,068	0,311	0,570	0,068	-0,093	0,051	0,033	0,017	0,002	0,001
5	TRAV	0,935	0,124	0,076	0,193	0,288	0,038	0,285	0,630	0,458	0,047	0,017	0,016
6	PART	0,237	0,085	0,021	-0,013	0,003	0,000	0,046	0,040	0,008	-0,101	0,193	0,051
7	ANNO	0,392	0,009	0,050	-0,188	0,030	0,003	0,083	0,006	0,003	0,646	0,355	0,220
8	FTFM	0,560	0,048	0,037	-0,154	0,148	0,010	-0,020	0,003	0,001	-0,257	0,409	0,189
9	BOIT	0,179	0,045	0,034	-0,116	0,086	0,005	0,050	0,016	0,005	-0,110	0,077	0,032
10	SPEC	0,647	0,036	0,082	-0,493	0,504	0,072	-0,251	0,131	0,103	-0,078	0,012	0,013

11	FTPB	0,587	0,036	0,030	-0,250	0,360	0,019	-0,185	0,196	0,056	-0,074	0,032	0,012
12	VOIS	0,584	0,036	0,029	-0,245	0,354	0,018	-0,184	0,199	0,056	-0,072	0,031	0,011
13	PUBL	0,720	0,131	0,040	-0,131	0,274	0,019	0,142	0,317	0,120	-0,090	0,129	0,063
14	BAL	0,937	0,169	0,206	-0,461	0,831	0,298	-0,028	0,003	0,006	0,162	0,102	0,262

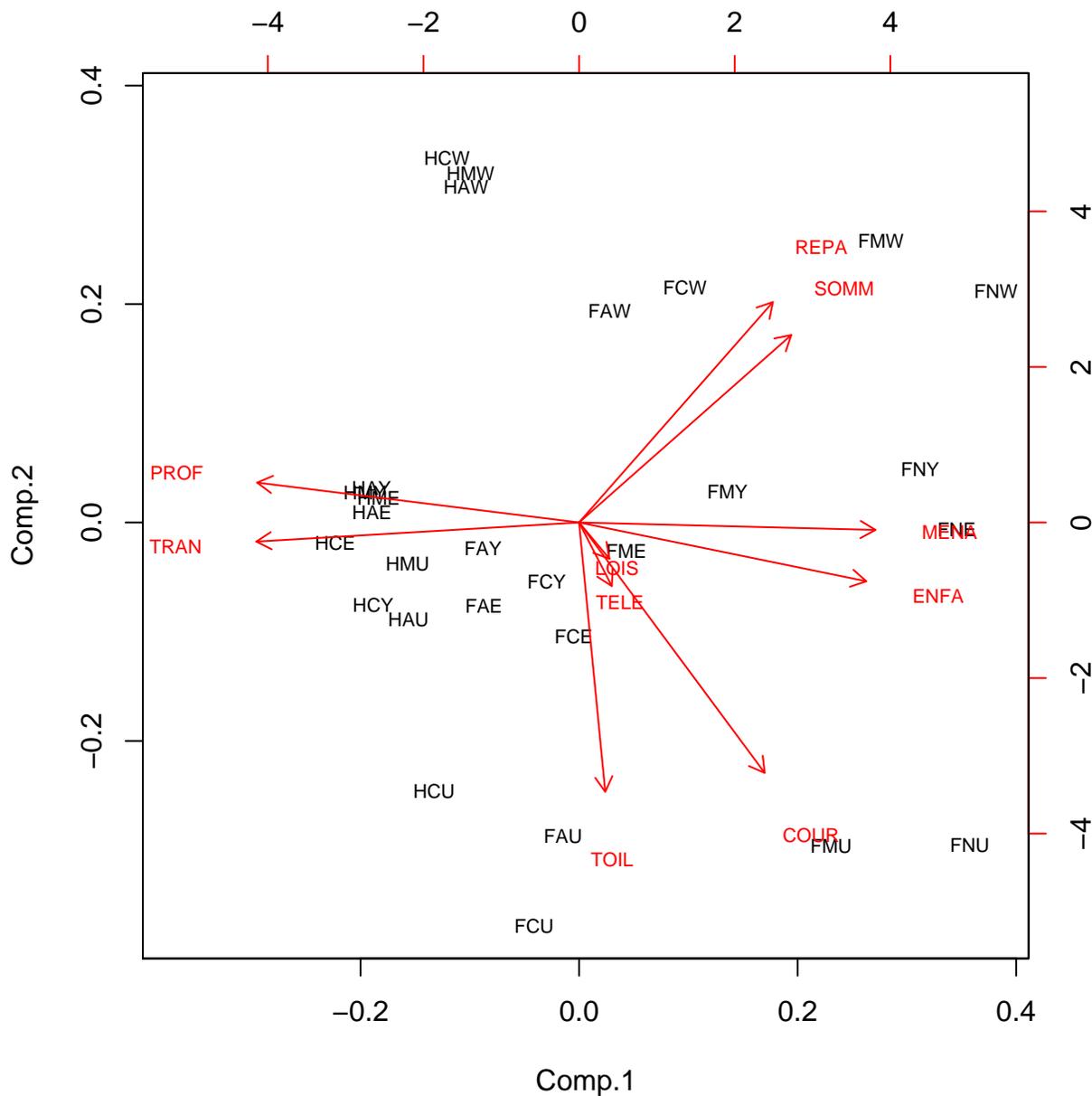


FIGURE 3 – Graphe factoriel des points lignes et colonnes

1) S'agissant d'un tableau de contingence, indiquer quelle est la méthode factorielle adaptée à ce type de tableau (et mise en oeuvre ici).

- 2) Combien de variables factorielles proposez-vous de retenir pour résumer ces données ? Discuter les raisons de ce choix.
- 3) Retrouver approximativement, à l'aide du graphique, la coordonnée factorielle du point CFON sur l'axe 1 (à droite).
- 4) Sur l'axe 1 (cf. Figure) le point AGRD est plus éloigné (coté négatif) du centre de gravité que ne l'est le point ONOQ. Pourtant la contribution de ce dernier à la variance de l'axe est plus forte (cf. Tableau). Expliquer la raison de ce paradoxe apparent.
- 5) Que suggère la position du point PCTR, près de l'intersection des deux axes factoriels ?
- 6) Que suggère, a priori, la proximité des points PFON et CFON sur le graphe factoriel (cf. Figure) ?
- 7) Quelle(s) précaution(s) faut-il prendre avant de conclure définitivement sur la proximité entre ces deux points (PFON et CFON) ? Pourquoi ?
- 8) On considère tout d'abord uniquement le nuage des CSP. A partir du tableau des aides à l'interprétation ci-dessus (cf. Tableau), construire le tableau nécessaire à l'interprétation de la première variable factorielle. Commenter le résultat obtenu.
- 9) Considérant cette fois uniquement les Circonstances (cf. Tableau), procéder de même (construction du tableau et commentaire).
- 10) En se fondant sur les résultats précédents (cf. questions 8 et 9), mettre en correspondance les deux nuages (nuage des CSP et nuage des Circonstances) et indiquer ce que suggère principalement cette analyse de la première variable factorielle.

Indications de réponses : 1) Une analyse Factorielle des Correspondances (AFC) appelée aussi Analyse des Correspondances (AC).

2) On note que les données se situent dans un espace de dimension 13 (plus petite dimension du tableau moins 1). Le pourcentage moyen de variance par axe est $1/13$ soit 7.7%. Ceci conduit à retenir les 3 premiers axes. Ce sont ceux dont la contribution à la variance totale est supérieure à 7.7%. Ces trois axes réunissent 76% de la variance totale.

3) On trouve environ +0.7 (en fait exactement 0.683)

4) Ceci est dû au fait que le poids de ONOQ (71/1000) est plus important que celui de AGRD (37/1000). La contribution à la variance est fonction (du carré) de la distance au centre de gravité, mais aussi du poids relatif.

5) Cela suggère que ces sujets (Professions intermédiaires de type Contremaître) ont un profil proche du profil moyen (toutes CSP réunies).

6) Cela suggère que les points ont des profils proches (sous la réserve ci-dessous), c'est-à-dire qu'ils rencontrent leurs conjoints dans le même type de lieu.

7) Il vaut mieux vérifier en regardant le tableau de données (ou plutôt le tableau des profils). En effet cette proximité peut être la conséquence d'une déformation des distances due à la projection des points sur un plan alors que le nuage se situe en réalité dans un espace de dimension beaucoup plus importante (13).

8) On retient les CTR supérieures à $1/16$ soit 63/1000.

-	+
ONOQ (95)	CFON (169)
AGRD(87)	PFON(165)
OART (79)	CENT (119)
OIND (63)	PLCE (88)

On constate que cet axe oppose (coté négatif) les Ouvriers (ONOQ, OART et OIND) et Agriculteurs (AGRD), aux cadres (CFON et CENT) et professions intermédiaires (PFON et PLCE) qu'ils soient fonctionnaires ou en entreprise (coté positif).

9) On retient les CTR supérieures à 1/14 soit 71/1000.

-	+
BAL (298)	ETUD (322)
SPEC (72)	VACA (89)

On constate que cet axe oppose principalement la rencontre dans un Bal (coté négatif) à la rencontre pendant les études (coté positif).

10) Il apparaît pour l'essentiel (sur ce premier axe) que les Ouvriers et Agriculteurs (de grandes exploitations) tendent à rencontrer leur conjoint dans un Bal, alors que les Cadres et Professions intermédiaires rencontrent plutôt leur conjoint pendant leurs Etudes.

Classification ascendante hiérarchique

Exercice 46 Données Conjoint

- 1) L'histogramme des indices de niveau ci-dessus (cf. Figure 4) suggère une partition des CSP en 3 classes. Indiquer les numéros de ces 3 classes.
- 2) Quelle est la part de variance dont rend compte cette partition en trois classes ?
- 3) A partir du dendrogramme ci-dessus (cf. Figure 5) indiquer quelles sont les CSP qui composent chacune des 3 classes principales que l'on nommera arbitrairement A, B et C.
- 4) Expliquer, à partir des tableaux des données et des profils (cf. dernière feuille), pourquoi il n'est guère surprenant que ARTI et EFCT appartiennent à la même classe :

Indications de réponses.

1) *c27, c28 et c29 (c28 et c29 étant deux sous-classes de la c30)*

2) *Cette partition en 3 classes rend compte de 58.4*

3) *Classe A OIND et OART*

Classe B CENT, PEON, CFON, PCTR, PSAN

Classe C ONOQ, OTRA, EENT, PLCE, ARTL EFCT, COMM. APTL AGRD.

4) *Ils ont des profils relativement proches (relativement aux autres). Si l'on considère les pourcentages de rencontre dans les différents lieux on trouve, respectivement pour ces deux CSP, 3% et 7% (au cours des Etudes), 6% et 4% (Vacances), 4% et 3% (lors d'une fête entre Amis), 8% et 6% (dans une association Sportive), 15% et 17% (au Travail), 6% et 6% (rencontre chez des particuliers), 1% et 0% (par Annonce ou Agence).*